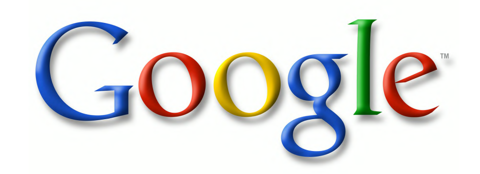
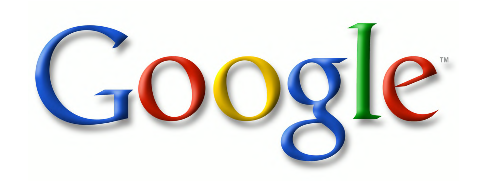
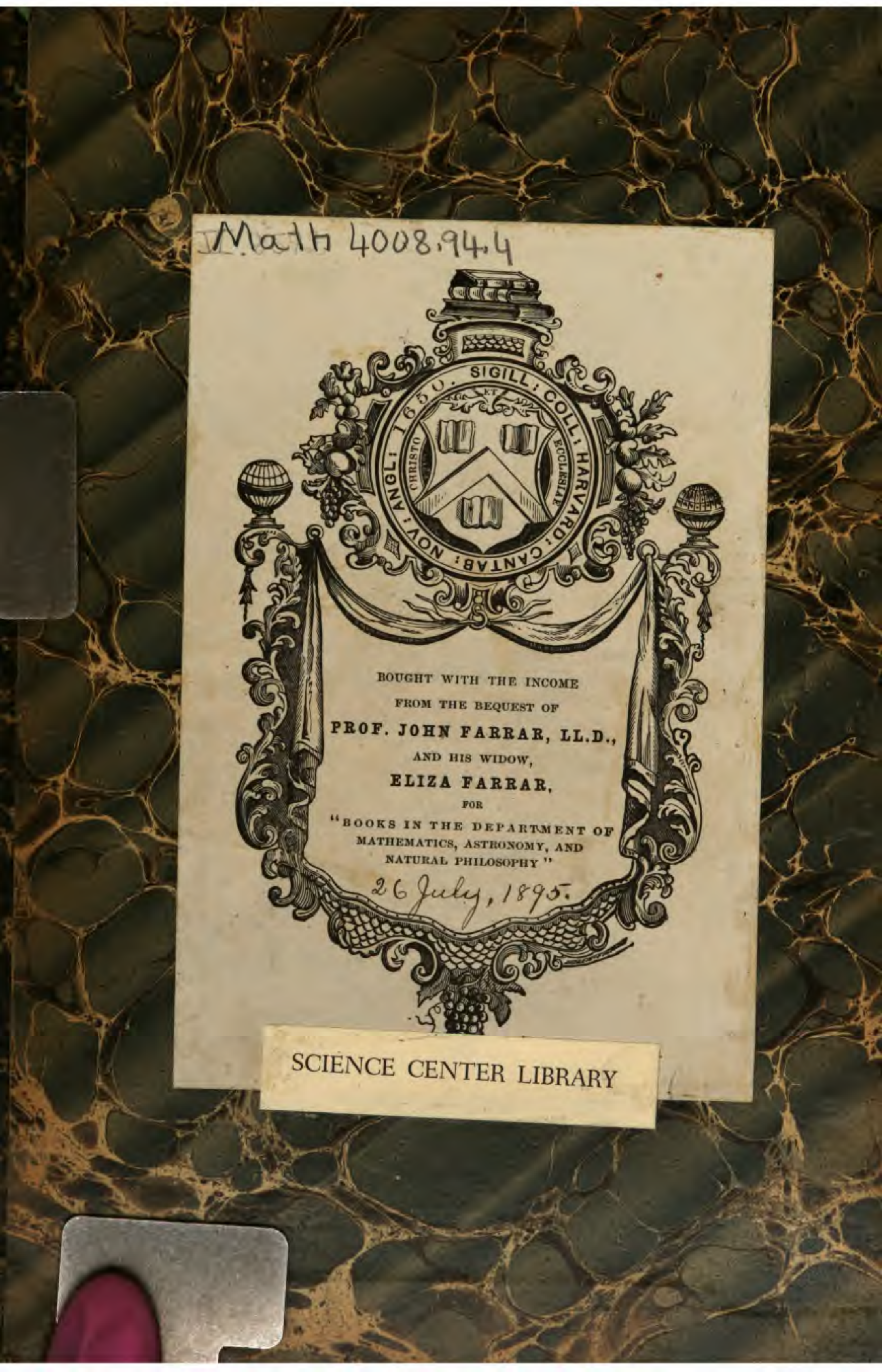






Math 4008.94.4
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
26 July, 1895.
SCIENCE CENTER LIBRARY



THE

THÉORIE NOUVELLE

DU

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

ET SON APPLICATION AUX COORDONNÉES CURVILIGNES.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

ERRATA DU TOME II.

Page 11, 2e et 3e lignes, au lieu de « fonctions connues », lire « facteurs communs ».

— 43, 5e ligne de texte, au lieu de (137), lire (138).

— 70, 14e ligne, *par le bas*, après le mot « solution », intercaler les mots omis « de la forme (8) ou (49) ».

— 85, équation (69); pour les coefficients des trois derniers termes, au lieu de

$$2D_1, 2E_1, 2F_1, \qquad \text{il faut simplement} \qquad D_1, E_1, F_1.$$

— 85, 2e équation de la première ligne (71), au lieu de

$$= c^2 + a^2 + b^2, \qquad \text{lire} \qquad = c^2 + a^2 - b^2.$$

— 91, équation (85), au lieu des coefficients $2D_2, 2E_2, 2F_2$, écrire simplement D_2, E_2, F_2.

— 128, équations (53), au terme du milieu de la première ligne, au lieu de

$$\sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2 \varpi} - U^2}, \qquad \text{il faut} \qquad \sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2 \varpi} - U^2}.$$

— 145, équation (81) au second membre de l'équation de gauche, au lieu de

$$\frac{U^2}{V - U}, \qquad \text{il faut} \qquad \frac{U^2}{V - U^2}.$$

— 147, dans la note, la dernière ligne des équations (α') doit être rétablie ainsi :

$$\sin Z = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 V - U^2}{V - U^2}}, \qquad \text{tang}\, Z = \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 V - U^2}}{\gamma \sqrt{V}}.$$

— 149, dans la note, à la 3e ligne des équations (θ), pour coefficient de l'avant-dernier terme dans la parenthèse, au lieu de -2α, lire $+2\alpha$.

— 151, dans la note, seconde ligne d'équations, pour le dernier terme, au lieu de

$$-\psi^2 \text{csh}\, \varpi\, M \,.\, \text{sn}\, h\, \varpi \,.\, \psi\, \text{csh}\, \varpi \,.\, \psi\, \text{csh}\, \varpi \sqrt{\alpha^2 V - U^2},$$

il faut simplement

$$-\psi^2 \text{csh}\, \varpi\, M \,.\, \text{sn}\, h\, \varpi \,.\, \psi\, \text{csh}\, \varpi \sqrt{\alpha^2 V - U^2}.$$

— 151, équation ($\varkappa$), dernier terme, dernier facteur, au lieu de γp, lire γq.

— 173, 5e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de u^2, lire u^2_ρ.

— 176, 8e ligne, au lieu de « le suivant se réduira », lire « les suivants (23) ou (26) se réduiront ».

Page 176, 10e ligne, au lieu de (23), lire (28).

— 178, dernière ligne de la note, au lieu de « XIII, p. 55 » lire « IX, p. 394 ».

— 187, 3e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de « u_2 en $u_2 + u_3$ et v_2 en $v_2 + v_3$ », lire « u_2 en u_3, v_2 en v_3, puis u_1 en $u_1 + u_2$ et v_1 en $v_1 + v_2$ ».

— 191, supprimer l'alinéa entier commençant par les mots « ces formules... ».

— 191, 6e et 7e lignes, supprimer le dernier membre de phrase de l'alinéa à partir des mots « qui sera également... ».

— 197, équation qui suit celle (63), pour le dernier terme, au lieu de

$+ (b^2c^2 + \cdots)$, il faut lire $- (b^2c^2 + \cdots)$.

— 202, équations (70), les valeurs de Y_1 et de Z_2 doivent être rétablies ainsi qu'il suit :

$$Y_1 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2}}(b^2 + \nu_1), \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}(c^2 + \nu_2).$$

— 220, dernière équation (108), dernier terme, au lieu de

$\frac{2}{in}\lambda_0$, lire $\frac{2}{in}\rho_0$.

220, seconde ligne des équations (109), au premier membre de l'équation de droite, au lieu de $c^2 + \lambda$, il faut $c^2 + \mu$.

— 6, équation (125), au second membre, au lieu de

$m^2\alpha^2 - n^2\beta^2$, il faut lire $\sqrt{m^2\alpha^2 - n^2\beta^2}$.

— 227, seconde ligne du second groupe d'équations, au lieu de

$= \varphi(r)[\ldots$, lire $= \frac{1}{4}\varphi(r)[\ldots$.

— 232, dernière équation (136), au dénominateur du second membre, au lieu de

$\operatorname{sn} h$, il faut $\operatorname{sn}^5 h$.

— 240, équation (149), au dernier terme dans les crochets, au lieu de

$\Pi(h - iK'), \omega)$, il faut simplement $\Pi(h - iK', \omega)$

— 42, dernière ligne d'équations, au second membre, au lieu de

$\int_{K'}^{h}\ldots$, il faut $\int_{iK'}^{h}\ldots$.

— 248, les trois équations (2) doivent être rétablies ainsi qu'il suit :

$$\overline{\Omega}_m = (\operatorname{sn}^m\omega \operatorname{dn}\omega \operatorname{cn}\omega)_1^2, \quad \overline{\Omega'_m} = (\operatorname{dn}^m\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{sn}\omega)_1^2, \quad \overline{\Omega''_m} = (\operatorname{cn}^m\omega \operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega)_1^2.$$

— 254, 3e et 4e lignes de la note, *par le bas*, au lieu de « l'exposant m pair, c'est-à-dire, celles de $m = 0$, ou $m = 2$, » lire « l'exposant α pair pour les sommes (96), c'est-à-dire celles de $\alpha = 0$, ou $\alpha = 2$, ».



APPENDICE

NOTE I

SUR LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE L'ISOTHERMIE POUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

La méthode proposée par nous dans notre Chapitre II pour la recherche des familles isothermes de surfaces appartenant à une catégorie déterminée, quoiqu'étant parfaitement justifiée en théorie, a pu fort bien, nous le reconnaissons, éveiller quelque doute dans l'esprit du Lecteur au sujet de son efficacité pratique, et par conséquent de sa valeur effective, en raison du trop grand nombre d'équations et de quantités différentes, qu'elles met en jeu et dont elle oblige à tenir compte à la fois. Nous croyons donc utile d'indiquer dans cette Note, par un exemple, le procédé général à l'aide duquel on parviendra à restreindre considérablement l'importance de cette difficulté spéciale, procédé consistant simplement à adopter un mode de notation qui permette de représenter simultanément un grand nombre d'équations semblables par une même formule, de même que l'esprit du calcul algébrique consiste à représenter par un symbole unique un très grand nombre ou une infinité de quantités différentes, que le calcul arithmétique serait forcé de représenter chacune individuellement par un algorithme spécial.

A cet effet, nous reprendrons, pour l'aborder de prime abord dans toute sa généralité, le problème de l'isothermie dans les Surfaces du Second Ordre, problème pour lequel l'application de notre méthode exige la considération simultanée de trente-cinq équations différentielles du second ordre entre dix inconnues, savoir les dix coefficients de l'équation générale proposée, et nous le résoudrons complètement en appliquant pas à pas notre méthode, sans supposer connus, bien entendu, ni faire intervenir en quoi que ce soit, à un instant quelconque de la recherche,

les résultats que nous avons déjà obtenus pour cette même question par un procédé abréviatif, dans le Chapitre précité.

Soit donc cette fois $\Lambda = 0$, l'équation la plus générale du second ordre, équation que nous aurons grand avantage, pour la facilité des calculs, à prendre sous la forme homogène avec laquelle on l'étudie le plus habituellement aujourd'hui, en posant

$$(1) \qquad \Lambda = \sum_i \sum_j A_{ij} x_i x_j,$$

avec la condition $A_{ij} = A_{ji}$, chacun des indices i et j devant recevoir séparément les quatre valeurs 0, 1, 2, 3, en sorte que Λ sera alors une forme quadratique à quatre variables, savoir $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, forme qui présentera dès lors un nombre de termes ou de coefficients distincts A_{ij} égal à $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$, qu'il s'agit de déterminer en fonction du paramètre λ, de façon que l'équation $\Lambda = 0$ représente une famille isotherme.

Si nous désignons en outre par k (ou bien k', ou k'') un nouvel indice recevant les seules valeurs 1, 2, 3, à l'exclusion de 0, et par $\mathbf{S}$, au lieu de $\sum$, le signe de sommation affecté à cet indice, notre équation générale (53), qu'il s'agit de former, pourra être écrite :

$$\Lambda'\left(\Lambda' \mathbf{S} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} - 2 \mathbf{S} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} \frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k}\right) + (\Lambda'' + \mathrm{T}\Lambda') . \mathbf{S}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\right)^2 = 0.$$

Or il est clair que l'expression (1) donnera, en tenant compte de la condition $A_{ij} = A_{ji}$,

$$(2) \qquad \Lambda' = \sum_i \sum_j A'_{ij} x_i x_j, \qquad \Lambda'' = \sum_i \sum_j A''_{ij} x_i x_j,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} = \sum_j A_{kj} x_j + \sum_i A_{ki} x_i = 2 \sum_i A_{ik} x_i, \qquad \frac{\partial^2 \Lambda}{d x_k^2} = 2 A_{kk},$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\right)^2 = 4\left(\sum_i A_{ik} x_i\right)^2 = 4\left(\sum_i A_{ik} x_i\right)\left(\sum_j A_{jk} x_j\right) = 4 \sum_i \sum_j A_{ik} A_{jk} x_i x_j,$$

et que l'on aura par suite, en introduisant une inconnue auxiliaire S, et faisant la somme des expressions précédentes,

$$(4)\qquad \mathbf{S}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} = 2\,\mathbf{S}\,A_{kk} = 2\,(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = 2\,S,$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{S}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\right)^2 = 4\,\mathbf{S}\sum_i\sum_j A_{ik}A_{jk}x_ix_j = 4\sum_i\sum_j\left(\mathbf{S}\,A_{ik}A_{jk}\right)x_ix_j \\ = 4\sum_i\sum_j \mathcal{A}_{ij}x_ix_j, \end{aligned}\right.$$

en convenant de poser, pour faciliter l'écriture,

$$(6)\qquad \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} = \mathbf{S}\,A_{ik}A_{jk} = A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3},$$

d'où l'on tirera ensuite par la différentiation

$$\mathcal{A}'_{ij} = \mathbf{S}\,(A_{ik}\,A'_{jk} + A'_{ik}A_{jk}).$$

Enfin, on déduira encore des expressions ci-dessus (3) et (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} = 2\left(\sum_i A_{ik}x_i\right).\,2\left(\sum_j A'_{jk}x_j\right) = 4\sum_i\sum_j A_{ik}A'_{jk}x_ix_j \\ = 2\sum_i\sum_j (A_{ik}A'_{jk} + A_{jk}A'_{ik})x_ix_j, \end{aligned}$$

et par suite on obtiendra, en ajoutant les trois expressions semblables, et tenant compte de la relation immédiatement précédente,

$$(7)\qquad \mathbf{S}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} = 2\sum_i\sum_j \mathbf{S}(A_{ik}A'_{jk} + A'_{ik}A_{jk})x_ix_j = 2\sum_i\sum_j \mathcal{A}'_{ij}x_ix_j.$$

Cela fait, les expressions (2), (4), et (7) donneront en conséquence

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \Lambda'\,\mathbf{S}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_k^2} - 2\,\mathbf{S}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\,\frac{\partial \Lambda'}{\partial x_k} \\ = \left(\sum_i\sum_j A'_{ij}x_ix_j\right)2S - 4\sum_i\sum_j \mathcal{A}'_{ij}x_ix_j = 2\sum_i\sum_j (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij})x_ix_j. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les expressions (2) pouvant aussi bien être écrites ainsi

$$(9) \qquad \Lambda' = \sum_{i'}\sum_{j'} A'_{i'j'} x_{i'} x_{j'}, \qquad \Lambda'' = \sum_{i'}\sum_{j'} A''_{i'j'} x_{i'} x_{j'},$$

on en conclura

$$(10) \qquad \Lambda'' + T\Lambda' = \sum_{i'}\sum_{j'} (A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) x_{i'j'},$$

et l'on obtiendra par suite, en substituant les valeurs (9), (8), (10), et (5) dans l'équation à former (53), pour cette équation elle-même

$$\sum_{i'}\sum_{j'} A'_{i'j'} x_{i'} x_{j'} \, . \, 2 \sum_i \sum_j (SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) x_i x_j$$
$$+ \sum_{i'}\sum_{j'} (A''_{i'j'} + TA'_{i'j'}) x_{i'} x_{j'} \, . \, 4 \sum_i \sum_j \mathcal{A}_{ij} x_i x_j = 0,$$

ou en divisant par 2, et réunissant tous les termes en une seule somme quadruple,

$$\sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} \left[A'_{i'j'}(SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) + 2(A''_{i'j'} + TA'_{i'j'})\mathcal{A}_{ij}\right] x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0,$$

équation qui, en posant, pour abréger,

$$(11) \qquad P_{ij}^{(i'j')} = A'_{i'j'}(SA'_{ij} - 2\mathcal{A}'_{ij}) + 2(A''_{i'j'} + TA'_{i'j'})\mathcal{A}_{ij},$$

pouvant évidemment être écrite indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} P_{ij}^{(i'j')} x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0, \qquad \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_i \sum_j P_{i'j'}^{(ij)} x_{i'} x_{j'} x_i x_j = 0,$$

offrira une forme encore plus symétrique, et dont nous reconnaîtrons tout à l'heure l'avantage, si nous l'écrivons, en la doublant, sous celle-ci

$$\sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} (P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)}) x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0,$$

ou, en abrégé,

$$(12) \qquad \sum_i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} \mathfrak{P}_{iji'j'} x_i x_j x_{i'} x_{j'} = 0, \qquad (i, j, i', j' = 0, 1, 2, 3)$$

en convenant de poser de nouveau

$$(13) \qquad \mathfrak{P}_{iji'j'} = \mathrm{P}_{ij}^{(i'j')} + \mathrm{P}_{i'j'}^{(ij)},$$

forme qui représentera donc définitivement pour nous l'équation générale (33) dans la question actuelle, et dont tous les coefficients correspondant à des termes distincts en x, y, et z devront en conséquence être égalés séparément à zéro.

Le premier membre de cette dernière équation étant alors une forme à quatre variables (ou un polynôme complet en x, y, z) du quatrième degré, le nombre N des termes distincts sera de $\frac{5.6.7}{1.2.3} = 5 \times 7 = 35$. Les dix coefficients A_{ij} de la forme A seront donc ainsi astreints, par notre méthode, à vérifier un système de 35 équations différentielles du second ordre, linéaires par rapport aux dérivées secondes, lesquelles pourront être remplacées par un système formé de $n = 10$ équations du second ordre seulement, et de $N - n = 25$ autres du premier ordre, obtenues par l'élimination des 10 dérivées secondes entre ces 35 équations. Les dix inconnues A_{ij} seront donc déterminées, si l'on se trouve dans le cas le plus général, par la condition de satisfaire en premier lieu à un système formé de dix de ces équations du premier ordre en particulier, d'où déjà la certitude que l'ensemble des expressions les plus générales de ces inconnues ne pourra comporter plus de dix constantes arbitraires, et il faudra ensuite que les mêmes valeurs, supposées ainsi obtenues, vérifient également, outre les quinze autres équations du premier ordre, les dix du second ordre que l'on aura préalablement mises à part pour l'élimination des dérivées secondes, c'est-à-dire en somme, l'ensemble des trente-cinq équations proposées (pp. 63-64).

Or, parmi ces trente-cinq équations du second ordre, que nous avons ainsi tout d'abord à considérer, il en est quatre que nous pouvons écrire immédiatement, et dont une intégrale première, facile à apercevoir à première vue, nous mettra très aisément sur la voie de ce système de dix équations du premier ordre propres à déterminer les inconnues, et dont la solution doit être telle qu'elle vérifie à la fois l'ensemble des trente-cinq équations proposées.

En effet, tandis qu'en général, pour un terme déterminé quelconque $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, le coefficient de ce terme sera composé d'un nombre plus ou moins considérable de quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$ différentes, formées successivement en prenant de toutes les manières possibles les quatre indices i, j, i', j', de façon que le produit $x_i x_j x_{i'} x_{j'}$ représente toujours le terme donné $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, en sorte que la forme générale de nos trente-cinq équations précitées pourra être figurée par

$$(14) \qquad \sum \mathfrak{P}_{iji'j'} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \sum \left(P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)}\right) = 0,$$

il y aura quatre termes particuliers pour lesquels ces coefficients ne comprendront évidemment chacun qu'une seule quantité $\mathfrak{P}_{iji'j'}$; ce sont ceux pour lesquels les quatre indices i, j, i', j' sont tous égaux entre eux, et qui correspondent par conséquent au terme constant de l'équation $\Lambda = 0$, et aux trois termes en x^4, y^4, et z^4.

Les quatre équations, formées en égalant ces quatre coefficients à zéro, seront donc représentées par

$$\mathfrak{P}_{iiii} = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2P_{ii}^{(ii)} = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'égalité de définition (11),

$$A'_{ii}(SA'_{ii} - 2\mathcal{A}'_{ii}) + 2(A''_{ii} + TA'_{ii})\mathcal{A}_{ii} = 0,$$

ou, en disposant de la fonction arbitraire T en faisant, en vue d'une simplification évidente, $2T = S$, puis ordonnant,

$$SA'_{ii}(A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii}) + 2(A''_{ii}\mathcal{A}_{ii} - A'_{ii}\mathcal{A}'_{ii}) = 0,$$

équation que l'on pourra écrire, en ajoutant et retranchant le terme $2A'_{ii}A''_{ii}$,

$$SA'_{ii}(A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii}) + 2\left[A''_{ii}(\mathcal{A}_{ii} + A'_{ii}) - A'_{ii}(\mathcal{A}'_{ii} + A''_{ii})\right] = 0,$$

et à laquelle dès lors on aperçoit de suite que l'on satisfera en faisant simplement

$$A'_{ii} + \mathcal{A}_{ii} = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Or, cette solution si simple va nous conduire très aisément, par une induction toute naturelle, au système du premier ordre que nous avons à chercher; car si l'on essaye de faire subir à nos quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$, définies par l'égalité (13) et (11), une transformation semblable, savoir, en mettant d'abord en facteur $S=2T$ dans l'expression (11) des $P_{ij}^{(i'j')}$, ce qui donnera

$$P_{ij}^{(i'j')} = SA'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + 2(A''_{i'j'}\mathcal{A}_{ij} - A'_{i'j'}\mathcal{A}'_{ij}),$$

puis, en ajoutant et retranchant de même les deux termes $A'_{ij}A''_{i'j'}$ et $A'_{i'j'}A''_{ij}$,

$$P_{ij}^{(i'j')} = SA'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + 2\big[A''_{i'j'}(\mathcal{A}_{ij} + A'_{ij}) - A'_{ij}A''_{i'j'} \\ - A'_{i'j'}(\mathcal{A}'_{ij} + A''_{ij}) + A'_{i'j'}A''_{ij}\big],$$

et par conséquent aussi, en permutant les deux groupes (ij), $(i'j')$,

$$P_{i'j'}^{(ij)} = SA'_{ij}(A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'}) + 2\big[A''_{ij}(\mathcal{A}_{i'j'} + A'_{i'j'}) - A'_{i'j'}A''_{ij} \\ - A'_{ij}(\mathcal{A}'_{i'j'} + A''_{i'j'}) + A'_{ij}A''_{i'j'}\big],$$

on aura donc, eu égard à la définition (13), en ajoutant ces deux dernières égalités, et négligeant les termes qui se détruisent,

$$\mathfrak{P}_{iji'j'} = P_{ij}^{(i'j')} + P_{i'j'}^{(ij)} = S\big[A'_{i'j'}(A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij}) + A'_{ij}(A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'})\big] \\ + 2\big[A''_{i'j'}(\mathcal{A}_{ij}+A'_{ij}) - A'_{i'j'}(\mathcal{A}'_{ij}+A''_{ij}) + A''_{ij}(\mathcal{A}_{i'j'}+A'_{i'j'}) - A'_{ij}(\mathcal{A}'_{i'j'}+A''_{i'j'})\big],$$

et par conséquent l'on voit que si l'on fait simplement

$$A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{i'j'} + \mathcal{A}_{i'j'} = 0,$$

ce qui entraînera

$$A''_{ij} + \mathcal{A}'_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A''_{i'j'} + \mathcal{A}'_{i'j'} = 0,$$

toutes les quantités $\mathfrak{P}_{iji'j'}$ devenant nulles individuellement, on aura satisfait à la fois à nos trente-cinq équations proposées, puisqu'elles sont toutes, comme nous l'avons reconnu, de la forme (14).

Le type simple

$$(15)\qquad A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{ij} = -\mathcal{A}_{ij}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3.)$$

qui, en raison des deux conditions $A_{ij} = A_{ji}$ et $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$, représente dix équations distinctes (au lieu de seize), constitue donc, en y remettant à la place des $\mathcal{A}_{ij}$ leurs valeurs de définition (6), un système *normal* de dix équations simultanées du premier ordre entre les dix inconnues A_{ij}, système dont l'intégrale générale, contenant dix constantes arbitraires, et vérifiant à la fois, ainsi qu'on vient de le voir, nos trente-cinq équations proposées, représente évidemment dès lors la solution la plus générale du problème que nous cherchons, laquelle est déterminée précisément, comme nous l'avons dit plus haut (p. 5), par la double condition, de vérifier ces trente-cinq équations et de renfermer le même nombre de constantes arbitraires.

La question est donc réduite désormais à trouver l'intégrale générale de ce nouveau système (15) de dix équations du premier ordre, qui, malgré qu'il ne soit pas linéaire, peut néanmoins être intégré, en ayant recours encore, comme dans le cas d'un système linéaire, à une transformation linéaire des inconnues.

A cet effet, désignant par $\alpha_j^{(i)}$ seize constantes provisoirement arbitraires, nous introduirons comme inconnues auxiliaires les seize quantités

$$(16)\qquad \mathcal{A}_j^{(i)} = \mathbf{S}\alpha_k^{(i)} A_{jk} = \alpha_1^{(i)} A_{j1} + \alpha_2^{(i)} A_{j2} + \alpha_3^{(i)} A_{j3},$$

qui se déduisent des fonctions $\mathcal{A}_{ij}$ suivant une loi très simple, savoir, en remplaçant dans leur expression (6) le facteur variable A_{ik} par la constante $\alpha_k^{(i)}$, et qui sont dès lors linéaires par rapport aux inconnues actuelles A_{ik} ou A_{jk}.

Pour cela, faisant successivement $j = 1, j = 2, j = 3$ dans l'équation ci-dessus (15), nous formerons tout d'abord les trois équations

$$A'_{i1} + \mathcal{A}_{i1} = 0, \qquad A'_{i2} + \mathcal{A}_{i2} = 0, \qquad A'_{i3} + \mathcal{A}_{i3} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en séparant en deux membres, et remettant à la place des $\mathcal{A}_{ik}$, leurs valeurs de définition (6) :

$$\left\{\begin{aligned} -A'_{i1} &= A_{i1}A_{11} + A_{i2}A_{12} + A_{i3}A_{13},\\ -A'_{i2} &= A_{i1}A_{21} + A_{i2}A_{22} + A_{i3}A_{23},\\ -A'_{i3} &= A_{i1}A_{31} + A_{i2}A_{32} + A_{i3}A_{33}.\end{aligned}\right.$$

Si alors, multipliant ces équations respectivement par $\alpha_1^{(j)}$, $\alpha_2^{(j)}$, $\alpha_3^{(j)}$ et les ajoutant par colonnes verticales, nous avons égard à la définition (16) de nos inconnues auxiliaires, en tenant compte de la condition $A_{ij} = A_{ji}$, nous formerons ainsi cette nouvelle équation

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &-(\alpha_1^{(j)}A'_{i1} + \alpha_2^{(j)}A'_{i2} + \alpha_3^{(j)}A'_{i3}) = A_{i1}(\alpha_1^{(j)}A_{11} + \alpha_2^{(j)}A_{21} + \alpha_3^{(j)}A_{31})\\ &+ A_{i2}(\alpha_1^{(j)}A_{12} + \alpha_2^{(j)}A_{22} + \alpha_3^{(j)}A_{32}) + A_{i3}(\alpha_1^{(j)}A_{13} + \alpha_2^{(j)}A_{23} + \alpha_3^{(j)}A_{33})\\ &= A_{i1}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{i2}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{i3}\mathcal{A}_3^{(j)},\end{aligned}\right.$$

que nous écrirons semblablement trois fois, en y faisant successivement $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, ce qui nous donnera :

$$\left\{\begin{aligned} -(\alpha_1^{(j)}A'_{11} + \alpha_2^{(j)}A'_{12} + \alpha_3^{(j)}A'_{13}) &= A_{11}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{12}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{13}\mathcal{A}_3^{(j)},\\ -(\alpha_1^{(j)}A'_{21} + \alpha_2^{(j)}A'_{22} + \alpha_3^{(j)}A'_{23}) &= A_{21}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{22}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{23}\mathcal{A}_3^{(j)},\\ -(\alpha_1^{(j)}A'_{31} + \alpha_2^{(j)}A'_{32} + \alpha_3^{(j)}A'_{33}) &= A_{31}\mathcal{A}_1^{(j)} + A_{32}\mathcal{A}_2^{(j)} + A_{33}\mathcal{A}_3^{(j)}.\end{aligned}\right.$$

Puis, multipliant de même ces trois dernières équations respectivement par $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$ et les ajoutant encore par colonnes verticales, nous formerons celles-ci :

$$\begin{aligned} &-\alpha_1^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{11} + \alpha_2^{(i)}A'_{21} + \alpha_3^{(i)}A'_{31}) - \alpha_2^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{12} + \alpha_2^{(i)}A'_{22} + \alpha_3^{(i)}A'_{32})\\ &-\alpha_3^{(j)}(\alpha_1^{(i)}A'_{13} + \alpha_2^{(i)}A'_{23} + \alpha_3^{(i)}A'_{33}) \qquad = (\alpha_1^{(i)}A_{11} + \alpha_2^{(i)}A_{21} + \alpha_3^{(i)}A_{31})\mathcal{A}_1^{(j)}\\ &\quad + (\alpha_1^{(i)}A_{12} + \alpha_2^{(i)}A_{22} + \alpha_3^{(i)}A_{32})\mathcal{A}_2^{(j)} + (\alpha_1^{(i)}A_{13} + \alpha_2^{(i)}A_{23} + \alpha_3^{(i)}A_{33})\mathcal{A}_3^{(j)}.\end{aligned}$$

Et, si enfin nous introduisons de nouveau dans l'équation ainsi obtenue nos nouvelles inconnues (16), nous formerons définitivement la suivante, qui tient lieu de douze équations entre les douze inconnues $\mathcal{A}_k^{(i)}$,

$$(18)\qquad -\alpha_1^{(j)}(\mathcal{A}_1^{(i)})' - \alpha_2^{(j)}(\mathcal{A}_2^{(i)})' - \alpha_3^{(j)}(\mathcal{A}_3^{(i)})' = \mathcal{A}_1^{(i)}\mathcal{A}_1^{(j)} + \mathcal{A}_2^{(i)}\mathcal{A}_2^{(j)} + \mathcal{A}_3^{(i)}\mathcal{A}_3^{(j)},$$

analogue aux équations (15) et encore non linéaire comme elles, mais plus facile à intégrer, comme on va le voir en disposant convenablement des constantes arbitraires $\alpha_k^{(j)}$.

En effet, faisant tout d'abord $i=j$, et remarquant que l'équation

$$-\alpha_1^{(i)}(\mathcal{A}_1^{(i)})' - \alpha_2^{(i)}(\mathcal{A}_2^{(i)})' - \alpha_3^{(i)}(\mathcal{A}_3^{(i)})' = (\mathcal{A}_1^{(i)})^2 + (\mathcal{A}_2^{(i)})^2 + (\mathcal{A}_3^{(i)})^2$$

peut alors être satisfaite en faisant séparément pour $k=1, 2, 3$,

$$-\alpha_k^{(i)}(\mathcal{A}_k^{(i)})' = (\mathcal{A}_k^{(i)})^2 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{(\mathcal{A}_k^{(i)})'}{(\mathcal{A}_k^{(i)})^2} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)}},$$

équation immédiatement intégrable, qui donne en désignant par $a_i^{(k)}$ la constante d'intégration,

$$\frac{1}{\mathcal{A}_k^{(i)}} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)}}(\lambda + a_i^{(k)}), \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A}_k^{(i)} = \frac{\alpha_k^{(i)}}{\lambda + a_i^{(k)}},$$

on se trouve tout naturellement conduit à essayer de satisfaire également avec cette même expression des $\mathcal{A}_k^{(i)}$ aux équations (18) elles-mêmes.

A cet effet, essayant tout d'abord, en vue de faciliter l'identification, de prendre dans ce but toutes les constantes $a_i^{(k)}$ introduites en dernier lieu égales entre elles, en faisant $a_i^{(1)} = a_i^{(2)} = a_i^{(3)} = a_i$, ce qui donnera à la place de l'expression qui précède, pour les $\mathcal{A}_k^{(i)}$ et leurs dérivées, les suivantes

$$(19) \qquad \mathcal{A}_k^{(i)} = \frac{\alpha_k^{(i)}}{\lambda + a_i}, \qquad (\mathcal{A}_k^{(i)})' = -\frac{\alpha_k^{(i)}}{(\lambda + a_i)^2},$$

et reportant ces dernières valeurs dans l'équation (18), nous aurons, en remarquant que les dénominateurs deviennent alors communs pour chaque membre séparément,

$$\frac{\alpha_1^{(j)}\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(j)}\alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(j)}\alpha_3^{(i)}}{(\lambda + a_i)^2} = \frac{\alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(i)}\alpha_2^{(j)} + \alpha_3^{(i)}\alpha_3^{(j)}}{(\lambda + a_i)(\lambda + a_j)},$$

ou, ce qui est la même chose, en faisant passer tous les termes dans un même membre, et mettant en évidence les fonctions connues

$$\left(\frac{1}{\lambda + a_i} - \frac{1}{\lambda + a_j}\right) \mathrm{S} \frac{\alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)}}{\lambda + a_i} = 0,$$

ou définitivement

$$\frac{a_j - a_i}{(\lambda + a_i)^2(\lambda + a_j)} \mathrm{S}\, \alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)} = 0;$$

et, par conséquent, cette équation étant satisfaite d'elle-même, comme nous le savions déjà, pour $i=j$, il suffira pour qu'elle le soit également pour toutes les valeurs de i et de j, que l'on fasse en outre, pour toutes les valeurs différentes de i et de j,

$$(20) \qquad \mathrm{S}\alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1^{(i)}\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(i)}\alpha_2^{(j)} + \alpha_3^{(i)}\alpha_3^{(j)} = 0;$$

c'est-à-dire explicitement, en attribuant d'abord à i et j les valeurs 1, 2, 3,

$$(21) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(3)} = 0, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)} = 0, \end{array}\right.$$

puis, en attribuant enfin à j la valeur 0, et à i successivement les valeurs 1, 2, 3,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(0)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(0)} = 0, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(0)} = 0. \end{array}\right.$$

Ce premier résultat obtenu, revenant maintenant à nos dix équations (15), nous observerons que l'on peut faire de ces équations trois parts, correspondant aux différents degrés des termes de l'équation de la surface proposée, et dont chacune s'intégrera successivement à l'aide d'un procédé différent, savoir :

a) La première, dans laquelle les deux indices i et j ne recevront que les seules valeurs 1, 2, 3, que nous pourrons donc, conformément à la notation usitée dans ce qui précède, figurer avec plus de précision par la formule

$$(22) \qquad A'_{kk'} + \mathcal{A}_{kk'} = 0,$$

et qui formera un système complet non linéaire, entre les inconnues $A_{kk'}$, qui sont les coefficients des termes du second degré dans l'équation de la famille de surfaces proposée;

b) La seconde, dans laquelle l'un des indices recevra la valeur 0, l'autre indice prenant encore successivement les valeurs 1, 2, 3, que nous pourrons figurer semblablement, eu égard à la définition des $\mathcal{A}_{ij}$, par l'une ou l'autre des formules

$$(23) \qquad A'_{k0} + \mathcal{A}_{k0} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{0k} + A_{k1}A_{01} + A_{k2}A_{02} + A_{k3}A_{03} = 0,$$

qui comprendra donc trois équations, et qui, en supposant les six inconnues $A_{kk'}$ déterminées à l'aide du système précédent (22), constituera un autre système complet, mais linéaire cette fois, entre les trois autres inconnues A_{0k} qui sont les coefficients des termes du premier degré dans l'équation proposée;

c) Enfin la dernière, qui ne comprendra que la seule équation pour laquelle i et j reçoivent simultanément la valeur 0, savoir

$$(24) \qquad A'_{00} + \mathcal{A}_{00} = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'_{00} + (A_{01})^2 + (A_{02})^2 + (A_{03})^2 = 0,$$

et qui, en supposant les trois inconnues A_{0k} déterminées à l'aide du système précédent (23), fournira alors l'expression de la dernière inconnue A_{00}, c'est-à-dire le terme constant de l'équation de la famille de surfaces, à l'aide d'une simple quadrature seulement, et, par conséquent, avec une constante simplement additive.

Occupons-nous donc d'abord du premier système (22). Si, restreignant à cet effet, dans la formule de définition (16) et dans l'équation (18), les deux indices i et j aux seules valeurs 1, 2, 3, et les récrivant en conséquence, pour plus de clarté, sous les

formes suivantes

$$(25)\qquad \mathcal{A}_k^{(k')} = \alpha_1^{(k')} A_{k1} + \alpha_2^{(k')} A_{k2} + \alpha_3^{(k')} A_{k3},$$

$$(26)\qquad -\alpha_1^{(k')}(\mathcal{A}_1^{(k)})' - \alpha_2^{(k')}(\mathcal{A}_2^{(k)})' - \alpha_3^{(k')}(\mathcal{A}_3^{(k)})' = \mathcal{A}_1^{(k')}\mathcal{A}_1^{(k)} + \mathcal{A}_2^{(k)}\mathcal{A}_2^{(k')} + \mathcal{A}_3^{(k)}\mathcal{A}_3^{(k')},$$

chacune de ces deux formules tiendra lieu de neuf équations ; la seconde représentera donc un système complet du premier ordre, non linéaire, entre les neuf inconnues $\mathcal{A}_k^{(k')}$, système dont une solution sera fournie, d'après ce qui précède, par l'expression (19), dans laquelle on aura fait aussi $i = k'$, savoir :

$$(27)\qquad \mathcal{A}_k^{(k')} = \frac{\alpha_k^{(k')}}{\lambda + a_{k'}}.$$

Or, nous pourrons évidemment, dans le système des six équations (22), considérer $A_{kk'}$ et $A_{k'k}$ comme des inconnues distinctes, à la condition d'adjoindre à ce système les trois équations complémentaires $A_{kk'} = A_{k'k}$, et nous aurons alors dans cette hypothèse à considérer, au lieu des six équations (22), le système équivalent des neuf équations

$$(28)\qquad A'_{kk'} + A_{k1}A_{k'1} + A_{k2}A_{k'2} + A_{k3}A_{k'3} = 0, \qquad A_{kk'} = A_{k'k},$$

entre les neuf inconnues $A_{kk'}$, ainsi entendues. Or, il ressort manifestement de la manière dont nous avons formé l'équation (18), d'où nous avons déduit comme cas particulier l'équation (26), que le système des neuf équations figurées par cette même équation (26) entre les neuf inconnues $\mathcal{A}_k^{(k')}$ forme un système complètement équivalent à ce dernier système (28) entre les inconnues $A_{kk'}$, car il est formé d'un même nombre d'équations entre pareil nombre d'inconnues, les dites équations étant formées chacune par une simple combinaison linéaire de ces mêmes équations (28). Ces deux systèmes (26) et (28) étant donc équivalents, les solutions connues (27) du premier système, étant reportées dans le second, le vérifieront nécessairement; c'est-à-dire que si, exprimant par le moyen des relations linéaires (25) les $A_{kk'}$ au moyen des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, nous remettons ensuite, dans ces mêmes expressions, à la place des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, leurs valeurs (27)

qui satisfont aux équations (26), les valeurs des $A_{kk'}$ ainsi obtenues vérifieront nécessairement le système (28).

Pour calculer ces mêmes valeurs, il n'y aura donc qu'à faire successivement $k' = 1, 2, 3$ dans la formule ci-dessus (25), ce qui nous donnera, en intervertissant les deux membres, les trois équations

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(1)} A_{k1} + \alpha_2^{(1)} A_{k2} + \alpha_3^{(1)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(1)}, \\ \alpha_1^{(2)} A_{k1} + \alpha_2^{(2)} A_{k2} + \alpha_3^{(2)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(2)}, \\ \alpha_1^{(3)} A_{k1} + \alpha_2^{(3)} A_{k2} + \alpha_3^{(3)} A_{k3} = \mathcal{A}_k^{(3)}, \end{array} \right.$$

dans lesquelles il faudra supposer remises aux seconds membres, à la place des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, les valeurs fournies par l'expression (27) pour $k' = 1, 2, 3$, et à résoudre ensuite ce dernier système par rapport aux $A_{kk'}$. Or les trois relations (21), qui existent par hypothèse entre les coefficients de ce système linéaire, c'est-à-dire les neuf constantes $\alpha_k^{(k')}$, vont nous permettre d'écrire les valeurs ainsi obtenues sous une forme beaucoup plus simple que celle sous laquelle elles se présentent ainsi de prime abord.

En effet, les deux dernières de ces équations (21), qui sont, en intervertissant leur ordre et celui des facteurs de la troisième,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(1)} = 0, \end{array} \right.$$

pouvant être mises aussi bien sous la forme

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_2^{(3)}} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(3)}} = \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(3)}}$$
$$= \frac{(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2 + (\alpha_3^{(1)})^2}{\Delta} = \frac{S^{(1)}}{\Delta},$$

en convenant de poser, pour faciliter les écritures,

$$(30) \qquad S^{(k)} = (\alpha_1^{(k)})^2 + (\alpha_2^{(k)})^2 + (\alpha_3^{(k)})^2, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} \end{vmatrix},$$

fournissent, par suite, immédiatement le premier des trois groupes d'égalités qui suivent

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}
\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_2^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(1)}}{S^{(1)}}, \\
\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(1)}}{S^{(1)}}, \\
\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(3)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(1)}}{S^{(1)}},
\end{array}\right.
&
\begin{array}{l}
\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(1)} - \alpha_3^{(3)}\alpha_2^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(2)}}{S^{(2)}}, \\
\alpha_3^{(3)}\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(3)}\alpha_3^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(2)}}{S^{(2)}}, \\
\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(3)}\alpha_1^{(1)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(2)}}{S^{(2)}},
\end{array}
\\
\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right.
&
\begin{array}{l}
\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)} - \alpha_3^{(1)}\alpha_2^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_1^{(3)}}{S^{(3)}}, \\
\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_2^{(3)}}{S^{(3)}}, \\
\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(2)} = \dfrac{\Delta\alpha_3^{(3)}}{S^{(3)}},
\end{array}
\end{array}\right.$$

ces trois groupes s'obtenant évidemment par un procédé semblable, en prenant ainsi successivement deux à deux les trois relations (21), et les traitant à chaque fois d'une façon analogue.

En outre, en multipliant respectivement par $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_1^{(3)}$ la première égalité de chacun des trois groupes, et les ajoutant, nous formerons encore cette autre équation

$$\Delta = \Delta\left[\frac{(\alpha_1^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \frac{(\alpha_1^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \frac{(\alpha_1^{(3)})^2}{S^{(3)}}\right],$$

et, par conséquent, en divisant par Δ, et renversant les deux membres, nous obtiendrons de cette façon successivement, par la considération des équations de même rang de chacun des trois groupes, les trois nouvelles égalités :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{(\alpha_1^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_1^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_1^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1, \\
\dfrac{(\alpha_2^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_2^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_2^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1, \\
\dfrac{(\alpha_3^{(1)})^2}{S^{(1)}} + \dfrac{(\alpha_3^{(2)})^2}{S^{(2)}} + \dfrac{(\alpha_3^{(3)})^2}{S^{(3)}} = 1.
\end{array}\right.$$

Le tableau qui précède (31) nous fournissant ainsi une expression concise de chacun des neuf déterminants mineurs du déterminant Δ (30), qui est le dénominateur commun des valeurs demandées des $A_{kk'}$, fournies par le système (29), il est clair qu'en tenant compte de ces expressions, ces dernières valeurs s'écriront simplement

$$\left\{\begin{aligned} A_{k1} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_1^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)}, \\ A_{k2} &= \frac{\alpha_2^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_2^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)}, \\ A_{k3} &= \frac{\alpha_3^{(1)}}{S^{(1)}}\mathcal{A}_k^{(1)} + \frac{\alpha_3^{(2)}}{S^{(2)}}\mathcal{A}_k^{(2)} + \frac{\alpha_3^{(3)}}{S^{(3)}}\mathcal{A}_k^{(3)}, \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles les $\mathcal{A}_k^{(k')}$ représentent par hypothèse les valeurs (27), qu'on pourra, en conséquence, en faisant la substitution, comprendre dans la formule unique

$$A_{kk'} = \frac{\alpha_k^{(1)}\alpha_{k'}^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_k^{(2)}\alpha_{k'}^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_k^{(3)}\alpha_{k'}^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)},$$

ou, ce qui est la même chose, sous forme condensée,

$$A_{kk'} = \underset{k''}{\mathrm{S}} \frac{\alpha_k^{(k'')}\alpha_{k'}^{(k'')}}{S^{(k'')}(\lambda + a_{k''})}, \tag{33}$$

et qui satisfont bien, comme on le voit, ainsi que cela devait être, à la condition $A_{kk'} = A_{k'k}$.

Telle est donc, nous en sommes assurés rigoureusement par les raisonnements qui précèdent, la solution du système (28) ou des équations (22). Une fois en possession de ce résultat, pour obtenir semblablement celle du second système (23), il nous serait facile, par l'application itérative des mêmes procédés, de ramener son intégration, comme celle de la dernière équation (24), à de simples quadratures, ce qui achèverait de déterminer

complètement les inconnues (*). Toutefois, le calcul de la dernière de ces quadratures, bien que n'offrant aucune difficulté, exigeant néanmoins un certain développement, une voie plus rapide, basée encore sur une induction rationnelle, et qui aura l'avantage de fournir, en outre, une vérification complète des calculs et des raisonnements précédents, nous dispensera de passer par tous ces intermédiaires, et nous conduira directement sans peine au même but, en étendant simplement aux indices i et j, dans toute leur généralité, le résultat auquel nous venons de parvenir pour les indices k et k' seulement, c'est-à-dire en essayant s'il ne serait pas possible de satisfaire à l'ensemble des dix équations proposées (15) avec les dix expressions

$$(34) \qquad A_{ij} = A_{ji} = \mathbf{S} \frac{\alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)}}{S^{(k)}(\lambda + a_k)}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

(*) En effet, si, nous reportant à notre équation (17), nous y faisons $i = 0$ et $j = k'$, elle deviendra, en faisant abstraction du membre intermédiaire,

$$-\left(\alpha_1^{(k')} A'_{01} + \alpha_2^{(k')} A'_{02} + \alpha_3^{(k)} A'_{03}\right) = A_{01} \mathcal{A}_1^{(k')} + A_{02} \mathcal{A}_2^{(k')} + A_{03} \mathcal{A}_3^{(k')},$$

ou, en y remplaçant au second membre les $\mathcal{A}_k^{(k')}$ par leurs valeurs obtenues tout à l'heure (27),

$$(\alpha) \qquad -\left(\alpha_1^{(k)} A'_{01} + \alpha_2^{(k')} A'_{02} + \alpha_3^{(k')} A'_{03}\right) = \frac{1}{\lambda + a_{k'}} \left(\alpha_1^{(k')} A_{01} + \alpha_2^{(k')} A_{02} + \alpha_3^{(k'} A_{03}\right).$$

Or, si nous avons égard à présent à la définition (16) des $\mathcal{A}_j^{(i)}$, laquelle donne, en y faisant $j = 0$, et $i = k'$,

$$(\beta) \qquad \mathcal{A}_0^{(k')} = \alpha_1^{(k')} A_{01} + \alpha_2^{(k')} A_{02} + \alpha_3^{(k')} A_{03},$$

l'équation que nous venons d'écrire (α) équivaudra à la suivante

$$-\left(\mathcal{A}_0^{(k')}\right)' = \frac{\mathcal{A}_0^{(k')}}{\lambda + a_{k'}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\left(\mathcal{A}_0^{(k')}\right)'}{\mathcal{A}_0^{(k')}} = \frac{-1}{\lambda + a_{k'}},$$

et donnera, en intégrant,

$$l \mathcal{A}_0^{(k')} = -l(\lambda + a_{k'}) + l \alpha_0^{(k')},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\gamma) \qquad \mathcal{A}_0^{(k')} = \frac{\alpha_0^{(k')}}{\lambda + a_{k'}},$$

ou, sous forme explicite,

$$(35)\qquad A_{ij} = A_{ji} = \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)}.$$

Or, rien n'est plus facile que cette vérification, car, en déduisant de cette même expression tout d'abord par la différentiation

$$(36)\qquad A'_{ij} = -\frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)^2} - \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)^2} - \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)^2},$$

puis, en faisant dans la même formule successivement $j = k$, et $i = k$,

$$\left\{\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)}, \\ A_{jk} &= \frac{\alpha_j^{(1)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(1)}(\lambda + a_1)} + \frac{\alpha_j^{(2)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(2)}(\lambda + a_2)} + \frac{\alpha_j^{(3)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(3)}(\lambda + a_3)}, \end{aligned}\right.$$

---

expression complètement analogue à la valeur déjà trouvée (27) des $\mathcal{A}_k^{(k')}$, de même que la formule précédente (6) l'est à la formule ci-dessus (25), ces deux dernières formules (6) et (γ) procédant l'une et l'autre des deux formules (25) et (27) en y écrivant simplement 0 au lieu de k. Il est bien évident dès lors que la répétition des mêmes procédés qui nous ont déjà fourni l'expression (33) des $A_{kk'}$, en partant des seules formules (25) et (27), nous donnera exactement de même, en partant cette fois des formules (6) et (γ), cette autre expression

$$A_{0k'} = \mathop{\mathrm{S}}_{k''} \frac{\alpha_0^{(k'')}\alpha_{k'}^{(k'')}}{S^{(k'')}(\lambda + a_{k''})},$$

de laquelle nous déduirons, en y faisant successivement $k' = 1, 2, 3$ (et écrivant k au lieu de k''),

$$A_{01} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_1^{(k)}}{S^{(k)}(\lambda + a_k)},\qquad A_{02} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_2^{(k)}}{S^{(k)}(\lambda + a_k)},\qquad A_{03} = \mathrm{S}\frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_3^{(k)}}{S^{(k)}(\lambda + a_k)},$$

et, dès lors, il n'y aura plus ensuite qu'à substituer ces valeurs dans l'équation (24) écrite ainsi

$$A'_{00} = -\left[(A_{01})^2 + (A_{02})^2 + (A_{03})^2\right],$$

pour être en mesure d'obtenir la dernière inconnue A_{00} par une nouvelle quadrature, ainsi que nous l'énonçons dans le texte.

et de là, en multipliant ces deux dernières égalités,

$$\begin{aligned}A_{ik}A_{jk} = {} & \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}\,(\alpha_k^{(1)})^2}{(S^{(1)})^2(\lambda+a_1)^2} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}\,(\alpha_k^{(2)})^2}{(S^{(2)})^2(\lambda+a_2)^2} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}\,(\alpha_k^{(3)})^2}{(S^{(3)})^2(\lambda+a_3)^2}\\ & + \frac{(\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(3)} + \alpha_j^{(2)}\alpha_i^{(3)})\,\alpha_k^{(2)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(2)}S^{(3)}(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)} + \frac{(\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(1)} + \alpha_j^{(3)}\alpha_i^{(1)})\,\alpha_k^{(3)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(3)}S^{(1)}(\lambda+a_3)(\lambda+a_1)}\\ & + \frac{(\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)} + \alpha_j^{(1)}\alpha_i^{(2)})\,\alpha_k^{(1)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(1)}S^{(2)}(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)},\end{aligned}$$

l'on en conclura ensuite, en sommant par rapport à k, et ayant égard à la définition (6) des $\mathcal{A}_{ij}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ij} = \mathop{\mathrm{S}} A_{ik}A_{jk} = {} & \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{(\lambda+a_1)^2}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}(\alpha_k^{(1)})^2}{(S^{(1)})^2} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{(\lambda+a_2)^2}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}(\alpha_k^{(2)})^2}{(S^{(2)})^2} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{(\lambda+a_3)^2}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}(\alpha_k^{(3)})^2}{(S^{(3)})^2}\\ & + \frac{(\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(3)}+\alpha_j^{(2)}\alpha_i^{(3)})}{(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}\alpha_k^{(2)}\alpha_k^{(3)}}{S^{(2)}S^{(3)}} + \frac{(\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(3)}\alpha_i^{(1)})}{(\lambda+a_3)(\lambda+a_1)}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}\alpha_k^{(3)}\alpha_k^{(1)}}{S^{(3)}S^{(1)}}\\ & + \frac{(\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)}+\alpha_j^{(1)}\alpha_i^{(2)})}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)}\,\frac{\mathop{\mathrm{S}}\alpha_k^{(1)}\alpha_k^{(2)}}{S^{(1)}S^{(2)}},\end{aligned}$$

expression qui, en tenant compte, d'une part, de la définition (30) des quantités $S^{(k)}$, et, d'autre part, des trois relations (20) ou (21), se réduit simplement à la suivante

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(1)}}{(\lambda+a_1)^2}\,\frac{1}{S^{(1)}} + \frac{\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(2)}}{(\lambda+a_2)^2}\,\frac{1}{S^{(2)}} + \frac{\alpha_i^{(3)}\alpha_j^{(3)}}{(\lambda+a_3)^2}\,\frac{1}{S^{(3)}},$$

laquelle, étant rapprochée de celle ci-dessus (36) de la dérivée A'_{ij}, montre que l'on a bien effectivement, avec les expressions (34) des A_{ij}, pour toutes les valeurs de i et de j,

$$A'_{ij} + \mathcal{A}_{ij} = 0,$$

comme nous l'avions pressenti, et voulions nous en assurer.

La question serait donc entièrement résolue par ces mêmes expressions (34) ou (35), si, en jetant un coup d'œil rétrospectif sur l'ensemble de ce calcul, il ne se présentait de suite à l'esprit une objection grave, qui nous a arrêtés nous-mêmes quelques instants, et qu'il importe de lever, car elle suffirait, si elle devait être confirmée, à ruiner l'autorité des raisonnements, ou l'exactitude des calculs, par le moyen desquels nous avons obtenu cette solution. En effet, les dix valeurs (34) des A_{ij} semblent à première vue renfermer douze constantes arbitraires, savoir les trois a_k, les trois $\alpha_0^{(k)}$, et six autres prises comme l'on voudra parmi les neuf $\alpha_k^{(k')}$ qui sont supposées liées entre elles seulement par les trois relations (20) ou (21), tandis que ces mêmes valeurs, satisfaisant à un système complet de dix équations différentielles du premier ordre, ne peuvent, *a priori*, renfermer en aucun cas plus de dix constantes arbitraires.

On découvrira facilement la solution de ce paradoxe, en regardant d'un peu plus près ces valeurs (34) ou (35), et examinant de quelle manière les douze constantes $\alpha_i^{(k)}$ figurent dans leur expression, car l'on reconnaîtra ainsi aisément qu'elles n'y entrent que par l'intermédiaire des *douze* rapports $\frac{\alpha_i^{(k)}}{\sqrt{S^{(k)}}} = \alpha_i^{(k)}.\ (S^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$, dont les valeurs sont liées entre elles par *six* équations, savoir les trois équations (32) d'une part, et d'autre part les trois équations (20) ou (21), que l'on peut écrire tout aussi bien, en excluant la valeur 0 pour i et j, et les divisant par $(S^{(k)})^{\frac{1}{2}}(S^{(k')})^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k''} \frac{\alpha_{k''}^{(k)}\alpha_{k''}^{(k')}}{\sqrt{S^{(k)}}\sqrt{S^{(k')}}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha_1^{(k)}\alpha_1^{(k')} + \alpha_2^{(k)}\alpha_2^{(k')} + \alpha_3^{(k)}\alpha_3^{(k')}}{(S^{(k)})^{\frac{1}{2}}\,(S^{(k')})^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

et, par conséquent, ces douze constantes $\alpha_i^{(k)}$, qui figurent en apparence dans les expressions (34), au lieu d'y introduire toutes ensemble neuf constantes arbitraires, comme nous le préjugions tout à l'heure, n'en n'introduisent en réalité que six seulement, ce qui fait, en y joignant les trois a_k, neuf constantes arbitraires en tout, au lieu de douze.

Mais alors la solution (34) devient incomplète, puisque l'inté-

grale générale du système (15), formé de dix équations différentielles du premier ordre, doit renfermer dix constantes arbitraires, et non pas neuf seulement. Mais si l'on se rappelle que, les A_{ik} entrant seules, d'après la définition (6) dans la composition des $\mathcal{A}_{ij}$, à l'exclusion par conséquent de A_{00}, cette inconnue n'intervient dans le système (15) que par sa dérivée seulement, et dans la seule équation (24), pour celle-là exceptionnellement on pourra aussi bien adjoindre à son expression (34) une constante arbitraire additive h, et l'on retrouvera bien ainsi le nombre requis de dix constantes arbitraires dans cette solution (34).

Convenant donc, en vue de prévenir désormais l'erreur que nous venons de signaler, de représenter chacune des douze constantes $\alpha_i^{(k)}(S^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$, qui interviennent seules dans les expressions (34), par une quantité spéciale pour laquelle nous adopterons précisément de nouveau le symbole $\alpha_i^{(k)}$, les neuf quantités $\alpha_{k'}^{(k)}$ étant supposées liées en conséquence par les six relations

$$\mathbf{S}_{k'}(\alpha_k^{(k')})^2 = 1, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{S}_{k''}\alpha_{k''}^{(k)}\alpha_{k''}^{(k')} = 0,$$

qui tiendront lieu des relations (32) et (21), c'est-à-dire sous forme explicite

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_1^{(1)})^2+(\alpha_1^{(2)})^2+(\alpha_1^{(3)})^2 = 1, \\ (\alpha_2^{(1)})^2+(\alpha_2^{(2)})^2+(\alpha_2^{(3)})^2 = 1, \\ (\alpha_3^{(1)})^2+(\alpha_3^{(2)})^2+(\alpha_3^{(3)})^2 = 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)}+\alpha_3^{(2)}\alpha_3^{(3)}) = 0, \\ \alpha_1^{(3)}\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(3)}\alpha_2^{(1)}+\alpha_3^{(3)}\alpha_3^{(1)}) = 0, \\ \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}+\alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)}) = 0, \end{array}\right.$$

nous récrirons alors la solution (34) sous la forme plus simple

$$A_{ij} = \mathbf{S}\frac{\alpha_i^{(k)}\alpha_j^{(k)}}{\lambda + a_k},$$

et ces dix expressions, étant entendu que pour la première inconnue A_{00} on devra lui adjoindre une constante additive h, représenteront définitivement dès lors la solution la plus générale du problème proposé.

En posant donc dans la formule qui précède, en vue de simplifier les écritures qui vont suivre,

$$(38) \qquad A_k = \frac{1}{\lambda + a_k}, \qquad \text{d'où} \qquad A_{ij} = \mathbf{S} A_k \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)},$$

la solution que nous venons d'obtenir consistera, sous forme explicite, dans les dix valeurs

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A_{00} = A_1 (\alpha_0^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_0^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_0^{(3)})^2 - h, \\ A_{11} = A_1 (\alpha_1^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_1^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_1^{(3)})^2, \\ A_{22} = A_1 (\alpha_2^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_2^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_2^{(3)})^2, \\ A_{33} = A_1 (\alpha_3^{(1)})^2 + A_2 (\alpha_3^{(2)})^2 + A_3 (\alpha_3^{(3)})^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{01} = A_{10} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_1^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_1^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_1^{(3)}, \\ A_{02} = A_{20} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_2^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_2^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_2^{(3)}, \\ A_{03} = A_{30} = A_1 \alpha_0^{(1)} \alpha_3^{(1)} + A_2 \alpha_0^{(2)} \alpha_3^{(2)} + A_3 \alpha_0^{(3)} \alpha_3^{(3)}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{23} = A_{32} = A_1 \alpha_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} + A_2 \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} + A_3 \alpha_2^{(3)} \alpha_3^{(3)}, \\ A_{31} = A_{13} = A_1 \alpha_3^{(1)} \alpha_1^{(1)} + A_2 \alpha_3^{(2)} \alpha_1^{(2)} + A_3 \alpha_3^{(3)} \alpha_1^{(3)}, \\ A_{12} = A_{21} = A_1 \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} + A_2 \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} + A_3 \alpha_1^{(3)} \alpha_2^{(3)}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

dans lesquelles A_1, A_2, A_3 représentent, pour abréger, d'après l'égalité de définition qui précède (38), les fractions simples :

$$(40) \qquad A_1 = \frac{1}{\lambda + a_1}, \qquad A_2 = \frac{1}{\lambda + a_2}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda + a_3}.$$

Or les neuf constantes $\alpha_k^{(k')}$ étant alors liées entre elles par les six relations ci-dessus (37), il devient visible, d'une part, que ces neuf constantes sont les cosinus directeurs d'un certain système d'axes fixes, dont ils définissent la position par rapport aux axes actuels, et d'autre part que la solution que nous venons d'obtenir, et qui est exprimée en dernière analyse par les valeurs (39) et (40), coïncidera *littéralement* avec celle formulée dans

notre Chapitre II par les égalités (129) (que nous avions déduite, tout d'abord, par la seule transformation des coordonnées rectilignes, de la solution d'une question plus simple précédemment obtenue), en établissant entre ces deux systèmes de formules, de même qu'entre les équations proposées (1) de cette Note et (126) ou (128) du Chapitre II, la corrélation suivante, savoir

$$
(41)\quad \left\{
\begin{array}{l}
A_{00} = \mathcal{J}, \quad A_{11} = \mathcal{A}, \quad A_{22} = \mathcal{B}, \quad A_{33} = \mathcal{C}, \\
A_{01} = A_{10} = \mathcal{G}, \quad A_{02} = A_{20} = \mathcal{H}, \quad A_{03} = A_{30} = \mathcal{K}, \\
A_{23} = A_{32} = \mathcal{D}, \quad A_{31} = A_{13} = \mathcal{E}, \quad A_{12} = A_{21} = \mathcal{F}, \\
\\
A_1 = A, \quad A_2 = B, \quad A_3 = C, \quad a_1 = a^2, \quad a_2 = b^2, \quad a_3 = c^2, \\
\alpha_0^{(1)} = x'_0, \quad \alpha_0^{(2)} = y'_0, \quad \alpha_0^{(3)} = z'_0, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha, \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha', \quad \alpha_1^{(3)} = \alpha'', \\
\alpha_2^{(1)} = \beta, \quad \alpha_2^{(2)} = \beta', \quad \alpha_2^{(3)} = \beta'', \quad \alpha_3^{(1)} = \gamma, \quad \alpha_3^{(2)} = \gamma', \quad \alpha_3^{(2)} = \gamma'',
\end{array}
\right.
$$

conclusion qui confirme aussi complètement qu'on peut le désirer celle à laquelle nous avions été conduits déjà par une voie beaucoup plus rapide.

Le succès du calcul assez long et compliqué que nous venons de présenter dans cette note tient tout entier, comme on le voit, au mode de notation que nous avons adopté pour les coefficients de l'équation de la famille de surfaces proposée $\Lambda = 0$, étant bien évident qu'il fût devenu radicalement impraticable, si nous avions écrit cette équation sous la forme (128), avec laquelle on l'étudiait naguère encore dans la Géométrie Analytique, c'est-à-dire si nous avions adopté un symbole spécial pour représenter chacun de ses dix coefficients : car les 35 équations du second ordre qu'il nous eût fallu écrire individuellement, à la suite les unes des autres, eussent mis en jeu 30 fonctions différentes, représentées chacune par un symbole particulier, si l'on borne la supputation aux inconnues primitives, et 74 en réalité, si l'on compte les fonctions auxiliaires dont l'introduction dans le

calcul nous a seule permis d'arriver à la solution du problème (*).

Aussi, bien que ce calcul ne nous ait amené en fin de compte à aucun résultat nouveau, nous ne pensons pas néanmoins que l'on doive le juger comme complètement dénué d'intérêt, en ce qu'il établit d'une façon péremptoire, que la multiplicité des inconnues et des équations à traiter ne constitue pas un obstacle irréductible à l'application de notre méthode pour la recherche des familles isothermes de surfaces, et qu'il en démontre *par le fait* la *praticabilité* effective (si l'on veut bien nous pardonner ce mot barbare), à la condition d'avoir recours, pour écrire l'équation de la famille de surfaces proposée, à une notation symbolique, présentant les mêmes avantages de compréhension et de symétrie. C'est pourquoi nous espérons, en terminant, l'indulgence et surtout la patience du Lecteur, pour accorder quelque attention à ce long calcul, quelque peu attrayant qu'il paraisse au premier abord, dans la pensée que l'application de procédés analogues aux équations de degrés supérieurs pourrait peut-être conduire un Analyste plus habile à la découverte de familles isothermes inconnues jusqu'ici, dont la rencontre constituerait pour la Science une précieuse acquisition, et présenterait cette fois dès lors un intérêt incontestable.

(*) Savoir, 30 pour les dix inconnues A_{ij}, et leurs dérivées premières et secondes; 20 également pour les dix fonctions $\mathcal{A}_{ij}$ et leurs dérivées premières; et enfin 24 pour les douze inconnues auxiliaires $\mathcal{A}_j^{(i)}$, et leurs dérivées premières, que nous avons seules considérées : ce qui, en y joignant les douze constantes $\alpha_i^{(k)}$, qui figurent dans les expressions (16), forme un total de 86 quantités différentes, qu'il eût fallu, avec ce mode de notation, représenter chacune par un symbole spécial.

NOTE II

SUR LA RECHERCHE DIRECTE D'UN SYSTÈME ORTHOGONAL COMPRENANT PARMI SES TROIS FAMILLES LE TYPE LE PLUS GÉNÉRAL DES FAMILLES ISOTHERMES DE SURFACES DU SECOND ORDRE.

Dans chacun des six Cas particuliers que passe successivement en revue notre Chapitre III, la connaissance *a priori*, qui nous était alors fournie par la considération des courbures principales du système, de la nature géométrique, ou, ce qui revient au même, de l'équation de l'une au moins des trois familles de surfaces, nous a permis, on s'en souvient, de déterminer très aisément la nature ou l'équation des deux autres familles, sans avoir recours à la méthode assez compliquée que nous avons développée pour le Cas général dans notre Chapitre V. C'est un problème analogue à celui-là que nous nous proposons de traiter dans cette Note, bien que la définition de la surface connue *a priori* ne nous soit plus imposée dans le cas actuel par la considération des courbures du système, mais que nous nous la donnions cette fois arbitrairement, ayant en vue de nous servir du résultat que nous allons rencontrer pour compléter d'une façon simple, dans la Note suivante, la seconde solution, que nous avons annoncée au début du Chapitre V précité, du second problème subsidiaire de Lamé, qui fait précisément l'objet de ce même Chapitre.

Prenant donc arbitrairement pour l'une des trois familles le type le plus général des surfaces isothermes du second ordre représenté, comme nous l'avons démontré dans notre Chapitre II, par l'équation (116), proposons-nous actuellement de reconnaître s'il est possible de trouver deux autres familles formant avec celle-là un système triple orthogonal, et dans l'affirmative de déterminer exactement ces deux familles; le tout sans faire appel

aux équations (5) de notre Chapitre III, posées en général par Lamé pour la détermination des surfaces d'un système orthogonal, ni sans supposer connu, bien entendu, le Système Ellipsoïdal ou des Coordonnées Elliptiques de Lamé et Jacobi : système que nous devrons évidemment rencontrer comme solution, mais en y arrivant sans effort d'invention, à l'aide d'un procédé logique d'investigation rationnelle, tandis que les illustres Inventeurs, savoir Lamé dans les *Leçons sur les Fonctions Inverses* (*), et Jacobi dans les *Vorlesungen* (**), posent d'emblée ce système, sans faire connaître comment on peut être conduit, par un enchaînement naturel de raisonnements ou de calculs, à cette notion en réalité fort compliquée, malgré l'apparence de simplicité qu'elle doit à sa merveilleuse symétrie.

Nous y arriverons sans peine, en nous proposant d'abord de déterminer simplement les deux systèmes de lignes de courbure de la famille de surfaces en question, mais à la condition de diriger le calcul de façon à obtenir pour chacun de ces deux systèmes isolément une équation du même type en x, y, z que celle de la surface proposée, tandis que le calcul de Monge, présenté dans la plupart des traités d'Analyse pour la détermination des lignes de courbure des surfaces du second ordre, ne fournissant les deux systèmes que par le moyen de leurs projections sur l'un des plans coordonnés, c'est-à-dire d'une équation entre deux coordonnées seulement, rompt par là même cette symétrie entre les trois équations connexes du problème, qui doit nous offrir précisément d'elle-même la réponse à la question que nous avons en vue dans cette courte Note.

La considération qui nous permettra de réaliser ce programme sera la remarque fort simple, dont nous avons déjà fait usage utilement dans l'un de nos précédents Mémoires (***), et que nous allons reproduire en quelques lignes, ainsi qu'il suit.

(*) § XXXVI, p. 47, et § LXXX, p. 105. Cet Ouvrage (1857) est antérieur de deux ans aux *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* (1859).

(**) 26e Leçon, p. 198, et 27e Leçon, pp. 207 et 208.

(***) *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*, § I, pp. 31-32.

Étant donnée une surface quelconque $F(x,y,z)=0$, si l'on suppose que l'on ait déterminé, par l'intégration de l'équation différentielle connue, l'ensemble des lignes de courbure, et que l'on représente par λ et μ les paramètres correspondant à chacun des deux systèmes, cet ensemble sera alors défini par trois équations telles que

$$(1) \qquad F(x,y,z)=0, \qquad F_1(x,y,z)=\lambda, \qquad F_2(x,y,z)=\mu,$$

et l'on obtiendra isolément soit le premier, soit le second système, en associant la seconde ou la troisième de ces équations à la première, qui est, par hypothèse, l'équation de la surface donnée.

Or, si l'on suppose ces trois équations résolues par rapport à x, y, z, c'est-à-dire mises sous la forme

$$(2) \qquad x=f(\lambda,\mu), \qquad y=\varphi(\lambda,\mu), \qquad z=\psi(\lambda,\mu),$$

on pourra envisager encore ces trois dernières équations comme représentant à volonté l'un ou l'autre des deux systèmes, à la condition d'y considérer comme une constante celui des deux paramètres λ ou μ qui lui est relatif, et l'autre comme une variable auxiliaire, analogue au temps ou à l'arc de courbe, en fonction de laquelle les coordonnées d'un point quelconque de la courbe se trouvent ainsi exprimées, et qu'il y aura avantage dès lors, par une raison évidente de symétrie, à prendre pour variable indépendante dans tous les calculs relatifs à cette théorie, et notamment, par exemple, pour la détermination de ces deux formes d'équations cherchées (1) ou (2) elles-mêmes.

Cela posé, l'équation différentielle des lignes de courbure, qui est, d'une façon générale, pour la surface $F(x,y,z)=0$,

$$(2^{\text{bis}}) \qquad \begin{vmatrix} dx, & \dfrac{dF}{dx}, & d\left(\dfrac{dF}{dx}\right) \\ dy, & \dfrac{dF}{dy}, & d\left(\dfrac{dF}{dy}\right) \\ dz, & \dfrac{dF}{dz}, & d\left(\dfrac{dF}{dz}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

dans le cas particulier de la surface du second ordre en question

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=\frac{1}{d^2}, \tag{3}$$

sera la suivante

$$\begin{vmatrix} dx, & \dfrac{x}{a^2+\nu}, & \dfrac{dx}{a^2+\nu} \\ dy, & \dfrac{y}{b^2+\nu}, & \dfrac{dy}{b^2+\nu} \\ dz, & \dfrac{z}{c^2+\nu}, & \dfrac{dz}{c^2+\nu} \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$\frac{x}{a^2+\nu}\left(\frac{1}{c^2-\nu}-\frac{1}{b^2+\nu}\right)dydz+\frac{y}{b^2+\nu}\left(\frac{1}{a^2+\nu}-\frac{1}{c^2+\nu}\right)dzdx$$
$$+\frac{z}{c^2+\nu}\left(\frac{1}{b^2+\nu}-\frac{1}{a^2+\nu}\right)dxdy=0,$$

laquelle, étant multipliée par $4xyz$, et chassant les dénominateurs, pourra encore être écrite :

$$\left\{\begin{aligned} &(b^2-c^2)\frac{x^2}{a^2+\nu}\,\frac{2ydy}{b^2+\nu}\,\frac{2zdz}{c^2+\nu}+(c^2-a^2)\frac{y^2}{b^2+\nu}\,\frac{2zdz}{c^2+\nu}\,\frac{2xdx}{a^2+\nu} \\ &\qquad+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2+\nu}\,\frac{2xdx}{a^2+\nu}\,\frac{2ydy}{b^2+\nu}=0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or, si nous envisageons isolément le premier système de lignes de courbure au paramètre λ, et que nous nous proposions d'obtenir ses équations sous la forme (2), en y considérant, ainsi que nous l'avons expliqué, μ comme une variable auxiliaire, on aperçoit de suite qu'on pourra satisfaire à la fois aux deux équations (3) et (4) en prenant pour $\frac{x^2}{a^2+\nu}$, $\frac{y^2}{b^2+\nu}$, $\frac{z^2}{c^2+\nu}$ des fonctions linéaires de la variable indépendante μ, c'est-à-dire en posant

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\nu} = A_1\mu + A_1', &\qquad &\frac{2x\,dx}{a^2+\nu} = A_1 d\mu,\\ &\frac{y^2}{b^2+\nu} = B_1\mu + B_1', &&\frac{2y\,dy}{b^2+\nu} = B_1 d\mu,\\ &\frac{z^2}{c^2+\nu} = C_1\mu + C_1', &&\frac{2z\,dz}{c^2+\nu} = C_1 d\mu,\end{aligned}\right.$$

les coefficients A_1, B_1, C_1, A_1', B_1', C_1' étant dès lors des fonctions de λ. Car, par la substitution de ces valeurs, les équations (3) et (4), qui définissent les lignes de courbure, devenant

$$(A_1 + B_1 + C_1)\,\mu + A_1' + B_1' + C_1' = \frac{1}{d^2},$$

$$\left[(b^2-c^2)\,(A_1\mu+A_1')B_1C_1+(c^2-a^2)\,(B_1\mu+B_1')\,C_1A_1+(a^2-b^2)\,(C_1\mu+C_1')A_1B_1\right]d\mu^2=0,$$

dont la seconde se réduit simplement à

$$A_1B_1C_1\left[(b^2-c^2)\frac{A_1'}{A_1}+(c^2-a^2)\frac{B_1'}{B_1}+(a^2-b^2)\frac{C_1'}{C_1}\right]d\mu^2=0,$$

on voit immédiatement qu'elles seront vérifiées en disposant des constantes de manière à satisfaire aux trois conditions

$$(6)\qquad A_1 + B_1 + C_1 = 0, \qquad A_1' + B_1' + C_1' = \frac{1}{d^2},$$

$$(7)\qquad (b^2-c^2)\frac{A_1'}{A_1}+(c^2-a^2)\frac{B_1'}{B_1}+(a^2-b^2)\frac{C_1'}{C_1}=0.$$

On reconnaitrait exactement de même que l'on obtiendra les équations du second système au paramètre μ, en prenant pour $\frac{x^2}{a^2+\nu}$, $\frac{y^2}{b^2+\nu}$, $\frac{z^2}{c^2+\nu}$ les fonctions linéaires de λ

$$(8)\qquad \frac{x^2}{a^2+\nu} = A_2\lambda + A_2', \qquad \frac{y^2}{b^2+\nu} = B_2\lambda + B_2', \qquad \frac{z^2}{c^2+\nu} = C_2\lambda + C_2',$$

dans lesquelles les coefficients A_2, B_2, ... C'_2, qui sont par hypothèse des fonctions de μ, vérifieraient les conditions

$$(9)\qquad A_2 + B_2 + C_2 = 0, \qquad A'_2 + B'_2 + C'_2 = \frac{1}{d^2},$$

$$(10)\qquad (b^2 - c^2)\frac{A'_2}{A_2} + (c^2 - a^2)\frac{B'_2}{B_2} + (a^2 - b^2)\frac{C'_2}{C_2} = 0.$$

Ainsi donc, on pourra obtenir simultanément les trois équations des deux systèmes de lignes de courbure, en prenant pour $\frac{x^2}{a^2+\nu}$, $\frac{y^2}{b^2+\nu}$, $\frac{z^2}{c^2+\nu}$ des expressions qui soient linéaires à la fois par rapport à λ et à μ considérées isolément. On satisfera à cette double condition de la façon la plus simple possible, en prenant pour ces quantités des expressions telles que

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\nu} = A(\lambda+g)(\mu+l), \qquad \frac{y^2}{b^2+\nu} = B(\lambda+h)(\mu+m),\\ &\frac{z^2}{c^2+\nu} = C(\lambda+k)(\mu+n),\end{aligned}\right.$$

les coefficients A, B, C, g, h, k, l, m, n étant à présent de véritables constantes, auquel cas ceux que nous avons appelés A_1, B_1, ... C'_1, A'_2, ... C'_2 dans les expressions (5) et (8), auront alors pour expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} &A_1 = A(\lambda+g), && B_1 = B(\lambda+h), && C_1 = C(\lambda+k),\\ &A'_1 = A(\lambda+g)l, && B'_1 = B(\lambda+h)m, && C'_1 = C(\lambda+k)n,\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned} &A_2 = A(\mu+l), && B_2 = B(\mu+m), && C_2 = C(\mu+n),\\ &A'_2 = A(\mu+l)g, && B'_2 = B(\mu+m)h, && C'_2 = C(\mu+n)k.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Avec ces valeurs, les conditions (6) et (9) étant alors

$$\left\{\begin{aligned} &(A+B+C)\lambda + Ag + Bh + Ck = 0,\\ &(A+B+C)\mu + Al + Bm + Cn = 0,\\ &(Al+Bm+Cn)\lambda + Agl + Bhm + Ckn = \frac{1}{d^2},\\ &(Ag+Bh+Ck)\mu + Alg + Bmh + Cnk = \frac{1}{d^2},\end{aligned}\right.$$

exigeront, pour être satisfaites quelles que soient λ et μ, c'est-à-dire quelle que soit la variable indépendante de l'un ou l'autre des deux systèmes,

$$(12) \qquad A + B + C = 0, \qquad Agl + Bhm + Ckn = \frac{1}{d^2},$$

$$(13) \qquad Ag + Bh + Ck = 0, \qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

De même les deux conditions (7) et (10) deviendront par ces substitutions

$$(14) \qquad \begin{cases} (b^2 - c^2)\,l + (c^2 - a^2)\,m + (a^2 - b^2)\,n = 0, \\ (b^2 - c^2)\,g + (c^2 - a^2)\,h + (a^2 - b^2)\,k = 0. \end{cases}$$

Outre ces conditions (12), (13), (14), une nouvelle équation entre les neuf coefficients cherchés A, B, C, g, h, k, l, m, n, qui figurent dans les expressions (11), résulte de ce que les deux systèmes de lignes de courbure se coupent orthogonalement, condition exprimée évidemment, d'une façon générale, par l'équation

$$(15) \qquad \frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\mu} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\mu} + \frac{dz}{d\lambda}\frac{dz}{d\mu} = 0,$$

les différentes dérivées qui entrent dans cette équation étant les dérivées partielles que fourniront les expressions (2). Car, au point de rencontre des deux courbes, les cosinus directeurs de l'élément de ligne du premier système sont proportionnels à $\frac{dx}{d\mu}, \frac{dy}{d\mu}, \frac{dz}{d\mu}$, du moment que, par hypothèse, pour cette ligne, μ est la variable indépendante et λ une constante, et, d'autre part, les cosinus directeurs de l'élément de ligne du second système sont proportionnels à $\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda}$, pour une raison toute semblable.

Or, si l'on a égard aux expressions (11) précitées, qui donneront, en chassant les dénominateurs et extrayant les racines, les valeurs

$$\begin{cases} x = \sqrt{A\,(a^2 + \nu).(\lambda + g)\,(\mu + l)}, \\ y = \sqrt{B\,(b^2 + \nu).(\lambda + h)\,(\mu + m)}, \\ z = \sqrt{C\,(c^2 + \nu).(\lambda + k)\,(\mu + n)}, \end{cases}$$

lesquelles représenteront alors pour le cas actuel les valeurs (2) en question, et donneront par la différentiation

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{d\lambda}=\dfrac{1}{2}\sqrt{A(a^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\mu+l}{\lambda+g}}, & \dfrac{dx}{d\mu}=\dfrac{1}{2}\sqrt{A(a^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\lambda+g}{\mu+l}}, \\ \dfrac{dy}{d\lambda}=\dfrac{1}{2}\sqrt{B(b^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\mu+m}{\lambda+h}}, & \dfrac{dy}{d\mu}=\dfrac{1}{2}\sqrt{B(b^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\lambda+h}{\mu+m}}, \\ \dfrac{dz}{d\lambda}=\dfrac{1}{2}\sqrt{C(c^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\mu+n}{\lambda+k}}, & \dfrac{dz}{d\mu}=\dfrac{1}{2}\sqrt{C(c^2+\nu)}\sqrt{\dfrac{\lambda+k}{\mu+n}}, \end{array}\right.$$

la condition trouvée tout à l'heure (15) sera simplement

$$(16) \qquad A(a^2+\nu)+B(b^2+\nu)+C(c^2+\nu)=0.$$

Il semble au premier abord que nous ayons obtenu ainsi, en rapprochant les égalités (12), (13), (14), et (16), sept équations entre les neuf coefficients cherchés, mais ces sept équations ne sont pas distinctes, ainsi qu'il est facile de le voir, car si nous joignons cette dernière (16) à la première (12), et les mettons sous la forme

$$\frac{A}{b^2-c^2}=\frac{B}{c^2-a^2}=\frac{C}{a^2-b^2}=D,$$

en introduisant, à titre de nouvelle indéterminée, la valeur commune de ces rapports, ce qui permettra de les remplacer par les trois autres

$$(17) \qquad A=(b^2-c^2)D, \qquad B=(c^2-a^2)D, \qquad C=(a^2-b^2)D,$$

l'on voit, en reportant ces valeurs dans les équations (13) et la seconde (12), que les premières se confondront alors avec les équations suivantes (14), de sorte que l'on n'aura, en définitive, à satisfaire jusqu'ici qu'aux trois seules conditions entre les sept inconnues g, h, k, l, m, n, et D :

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} (b^2-c^2)g+(c^2-a^2)h+(a^2-b^2)k=0, \\ (b^2-c^2)l+(c^2-a^2)m+(a^2-b^2)n=0, \\ D\left[(b^2-c^2)gl+(c^2-a^2)hm+(a^2-b^2)kn\right]=\dfrac{1}{d^2}. \end{array}\right.$$

Pour trouver maintenant, entre les mêmes constantes, de nouvelles relations qui permettent de déterminer, dans la mesure que comporte la question, les neuf coefficients inconnus qui figurent dans nos équations (11), multiplions respectivement ces équations, en premier lieu par $\frac{a^2+\nu}{\lambda+g}$, $\frac{b^2+\nu}{\lambda+h}$, $\frac{c^2+\nu}{\lambda+k}$, puis, en second lieu, par $\frac{a^2+\nu}{\mu+l}$, $\frac{b^2+\nu}{\mu+m}$, $\frac{c^2+\nu}{\mu+n}$, et ajoutons-les. Nous formerons ainsi les deux équations

$$(19) \qquad \frac{x^2}{\lambda+g}+\frac{y^2}{\lambda+h}+\frac{z^2}{\lambda+k}=\mathrm{H}, \qquad \frac{x^2}{\mu+l}+\frac{y^2}{\mu+m}+\frac{z^2}{\mu+n}=\mathrm{K},$$

dans lesquelles les seconds membres, étant les valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}=\mathrm{A}(a^2+\nu)(\mu+l)+\mathrm{B}(b^2+\nu)(\mu+m)+\mathrm{C}(c^2+\nu)(\mu+n), \\ \mathrm{K}=\mathrm{A}(a^2+\nu)(\lambda+g)+\mathrm{B}(b^2+\nu)(\lambda+h)+\mathrm{C}(c^2+\nu)(\lambda+k), \end{array}\right.$$

qui se réduisent respectivement, eu égard à la dernière condition (16), à celles-ci

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}=\mathrm{A}(a^2+\nu)l+\mathrm{B}(b^2+\nu)m+\mathrm{C}(c^2+\nu)n, \\ \mathrm{K}=\mathrm{A}(a^2+\nu)g+\mathrm{B}(b^2+\nu)h+\mathrm{C}(c^2+\nu)k, \end{array}\right.$$

seront, par conséquent, encore de simples constantes. Et dès lors ces deux équations (19), ne contenant chacune qu'un seul des deux paramètres λ ou μ, représenteront évidemment, pour le cas actuel, les deux dernières équations (1) qui définissent isolément, dans notre exposé préliminaire, les deux systèmes de lignes de courbure, lesquels doivent par hypothèse satisfaire à la même équation différentielle (2bis).

Or, comme en général l'équation différentielle formée par l'élimination de la constante ou paramètre ρ entre l'équation donnée

$$\frac{x^2}{\rho+\alpha}+\frac{y^2}{\rho+6}+\frac{z^2}{\rho+\gamma}=\mathrm{G},$$

et sa différentielle

$$\frac{xdx}{\rho+\alpha}+\frac{ydy}{\rho+6}+\frac{zdz}{\rho+\gamma}=0,$$

contiendra évidemment les quatre coefficients distincts α, β, γ, G, et, par conséquent, sera généralement différente pour chaque système différent de valeurs de ces quatre coefficients, il y a donc lieu de présumer, sans qu'on puisse toutefois l'affirmer *a priori* (la constante G pour le cas envisagé étant une certaine fonction des trois autres constantes α, β, γ), que, puisque les deux équations du type précédent (19) doivent fournir la même équation différentielle (4), il faudra pour cela que l'on ait dans la question actuelle

$$(21) \qquad g = l, \qquad h = m, \qquad k = n,$$

conditions qui entraîneront semblablement, eu égard aux valeurs (20), $H = K$, de manière que ces deux équations deviendront alors identiques, sauf la dénomination du paramètre, c'est-à-dire au fond les limites entre lesquelles chacun des deux sera renfermé, sans quoi les deux équations se confondraient absolument en réalité.

Il y a donc lieu d'essayer si ces trois nouvelles conditions (21) sont compatibles avec les précédentes (18), et si leur ensemble peut conduire à une forme déterminée des équations (1) ou (2) pour la question actuelle.

Partant de cette donnée, on sera tout naturellement amené à satisfaire, à la fois, à ces dernières conditions (21), et aux deux premières (18), par des expressions de la forme

$$(22) \qquad g = l = \sigma a^2 + \tau, \qquad h = m = \sigma b^2 + \tau, \qquad k = n = \sigma c^2 + \tau,$$

parce qu'alors, ces équations étant ainsi vérifiées quelles que soient σ et τ, la troisième équation (18), qui deviendra en même temps

$$(23) \qquad D\left[(b^2 - c^2)(\sigma a^2 + \tau)^2 + (c^2 - a^2)(\sigma b^2 + \tau)^2 + (a^2 - b^2)(\sigma c^2 + \tau)^2\right] = \frac{1}{d^2},$$

fournira immédiatement la valeur du coefficient D, et par suite les équations (17) celles de A, B, C, en sorte que toutes les conditions successivement posées seront satisfaites, et les neuf coefficients cherchés A, B, C, g, h, k, l, m, n seront tous exprimés en

fonction des deux nouvelles constantes σ et τ, qui demeureront indéterminées. On va voir tout à l'heure la raison de cette indétermination.

Effectuant donc ce calcul, l'équation (23) développée sera

$$\mathrm{D}\Big[(b^2-c^2)(\sigma^2a^4+2\sigma\tau a^2+\tau^2)+(c^2-a^2)(\sigma^2b^4+2\sigma\tau b^2+\tau^2)$$
$$+(a^2-b^2)(\sigma^2c^4+2\sigma\tau c^2+\tau^2)\Big]=\frac{1}{d^2}$$

et, étant ordonnée par rapport à σ, pourra, après réduction, être écrite sous la forme

$$(24)\qquad \mathrm{D}\left[(b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4\right]\sigma=\frac{1}{\sigma d^2}.$$

D'autre part, en remettant les mêmes valeurs (17) et (22) dans les expressions (20) de H et K, celles-ci prendront semblablement la valeur commune

$$\mathrm{H}=\mathrm{K}=\mathrm{D}\Big[(b^2-c^2)(a^2+\nu)(\sigma a^2+\tau)+(c^2-a^2)(b^2+\nu)(\sigma b^2+\tau)$$
$$+(a^2-b^2)(c^2+\nu)(\sigma c^2+\tau)\Big]$$
$$=\mathrm{D}\Big[(b^2-c^2)\{\sigma a^4+(\nu\sigma+\tau)a^2+\nu\tau\}+(c^2-a^2)\{\sigma b^4+(\nu\sigma+\tau)b^2+\nu\tau\}$$
$$+(a^2-b^2)\{\sigma c^4+(\nu\sigma+\tau)c^2+\nu\tau\}\Big]$$
$$=\mathrm{D}\left[(b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4\right]\sigma=\frac{1}{\sigma d^2},$$

en vertu de l'équation précédente (24). Et, par conséquent, en reportant cette valeur, ainsi que celles (22) dans les deux équations (19), qui sont, avons-nous dit, celles des deux systèmes de lignes de courbure considérées isolément, celles-ci seront alors comprises toutes les deux dans le type (ρ étant λ ou μ)

$$\frac{x^2}{\rho+\sigma a^2+\tau}+\frac{y^2}{\rho+\sigma b^2+\tau}+\frac{z^2}{\rho+\sigma c^2+\tau}=\frac{1}{\sigma d^2},$$

lequel peut être ramené très aisément au type même de la surface proposée (3) par un changement linéaire de paramètre ; car

si on l'écrit ainsi, en la multipliant par σ (ce qui revient à diviser par σ au dénominateur),

$$\frac{x^2}{a^2+\frac{1}{\sigma}(\rho+\tau)}+\frac{y^2}{b^2+\frac{1}{\sigma}(\rho+\tau)}+\frac{z^2}{c^2+\frac{1}{\sigma}(\rho+\tau)}=\frac{1}{d^2},$$

l'on voit qu'il suffira de faire alors $\rho'=\frac{1}{\sigma}(\rho+\tau)$, de substituer, et d'effacer enfin les accents, pour obtenir ces deux équations (19) sous un type identique à celui de l'équation (3).

Admettant donc que nous ayons agi de la sorte pour chacune d'elles, et joignant alors les deux équations ainsi obtenues à l'équation de la surface proposée elle-même, nous aurons donc ainsi pour les trois équations (1) relatives au problème particulier actuel (sauf interversion de l'ordre dans lequel nous allons les écrire) les trois suivantes

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=\frac{1}{d^2},\\ &\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=\frac{1}{d^2},\\ &\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=\frac{1}{d^2},\end{aligned}\right.$$

qui sont, comme l'on voit, parfaitement déterminées, nonobstant l'indétermination persistante des coefficients σ et τ, et qui, par conséquent, résolvent complètement le problème proposé relativement à la surface donnée (3).

Semblablement, si l'on voulait obtenir de prime abord le même système d'équations sous la forme (2), il suffirait, en premier lieu, de récrire l'équation (24), en vertu d'une transformation déjà usitée à plusieurs reprises dans le Chapitre V (voir les notes des pages 380 et 386), ainsi qu'il suit

$$-\mathrm{D}\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)\,(a^2-b^2).\,\sigma=\frac{1}{\sigma d^2},$$

d'où

$$\mathrm{D}=\frac{1}{\sigma^2 d^2}\,\frac{-1}{(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)\,(a^2-b^2)}$$

et par suite, en reportant dans les expressions (17), d'en conclure pour A, B, C, les valeurs

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &A = \left[\sigma^2 d^2 (a^2-b^2)(a^2-c^2)\right]^{-1}, \qquad B = \left[\sigma^2 d^2 (b^2-c^2)(b^2-a^2)\right]^{-1}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad C = \left[\sigma^2 d^2 (c^2-a^2)(c^2-b^2)\right]^{-1}, \end{aligned} \right.$$

lesquelles, étant remises à leur tour dans les équations (11), permettront de les écrire ainsi qu'il suit

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\nu} &= \frac{1}{\sigma^2 d^2}\,\frac{(\lambda+g)(\mu+l)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = \frac{1}{d^2}\,\frac{\frac{1}{\sigma}(\lambda+g).\frac{1}{\sigma}(\mu+l)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \frac{y^2}{b^2+\nu} &= \frac{1}{\sigma^2 d^2}\,\frac{(\lambda+h)(\mu+m)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} = \frac{1}{d^2}\,\frac{\frac{1}{\sigma}(\lambda+h).\frac{1}{\sigma}(\mu+m)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \frac{x}{c^2+\nu} &= \frac{1}{\sigma^2 d^2}\,\frac{(\lambda+k)(\mu+n)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} = \frac{1}{d^2}\,\frac{\frac{1}{\sigma}(\lambda+k).\frac{1}{\sigma}(\mu+n)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\,; \end{aligned} \right.$$

puis, en second lieu, de remarquer que les hypothèses ci-dessus (22) donneront, en introduisant comme tout à l'heure le nouveau paramètre ρ',

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sigma}(\rho+g) &= \frac{1}{\sigma}(\rho+l) = \frac{1}{\sigma}(\rho+\sigma a^2+\tau) = a^2 + \frac{1}{\sigma}(\rho+\tau) = a^2+\rho', \\ \frac{1}{\sigma}(\rho+h) &= \frac{1}{\sigma}(\rho+m) = \frac{1}{\sigma}(\rho+\sigma b^2+\tau) = b^2 + \frac{1}{\sigma}(\rho+\tau) = b^2+\rho', \\ \frac{1}{\sigma}(\rho+k) &= \frac{1}{\sigma}(\rho+n) = \frac{1}{\sigma}(\rho+\sigma c^2+\tau) = c^2 + \frac{1}{\sigma}(\rho+\tau) = c^2+\rho'. \end{aligned} \right.$$

Et dès lors, en laissant de côté, soit le second, soit le premier membre, de ces suites d'égalités, et y faisant en même temps

$$\text{soit}\quad \rho = \lambda,\quad \rho' = \lambda', \qquad\qquad \text{soit}\quad \rho = \mu,\quad \rho' = \mu',$$

puis, reportant les valeurs qu'elles fourniront ainsi dans les équations précédentes (27), chassant alors les dénominateurs des premiers membres, et enfin, cela fait, effaçant encore les accents,

l'on voit que nous obtiendrons ainsi pour les trois équations du problème correspondant à la forme (2) de notre exposé préliminaire, les trois suivantes

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{d^2}\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{1}{d^2}\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{1}{d^2}\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{aligned} \right.$$

qui sont bien effectivement celles qui résulteraient de la résolution des équations précédemment rencontrées (25).

Cette première forme d'équations (25), que nous venons d'obtenir comme solution, pour définir les lignes de courbure de la surface donnée (3), fournit immédiatement la réponse à la question qui fait l'objet de cette Note; car ce premier mode de représentation fait voir que les lignes de courbure appartenant à chacun des deux systèmes sont tracées, sur la surface du second ordre proposée, par deux familles de surfaces appartenant au même type, c'est-à-dire, comme elle, à centre unique, homofocales entre elles et avec celles de la famille de surfaces proposée, avec la condition que chacune des trois surfaces (25) appartienne à une variété différente, afin que leurs intersections deux à deux soient réelles (*), ce qui revient à dire qu'il devra se trouver parmi

---

(*) Si l'on voulait se servir de ces résultats pour établir, en y arrivant par un procédé logique et naturel, les formules fondamentales relatives à l'emploi des Coordonnées Elliptiques, il suffirait d'ajouter quelques mots seulement aux développements qui précèdent, pour montrer, ainsi que nous le faisons dans notre Chapitre V (pp. 391-392), après avoir rencontré ces mêmes résultats comme solution du problème le plus général, que si l'on suppose les constantes a^2, b^2, c^2 classées par rang de grandeur dans l'ordre habituel : $a^2 > b^2 > c^2$, cette condition, que chacune des trois surfaces (25) appartienne à une variété différente, imposera la délimitation et la séparation des paramètres exprimée par les inégalités

$$-a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu,$$

la famille au paramètre λ étant alors composée d'hyperboloïdes à deux nappes, celle au paramètre μ d'hyperboloïdes à une nappe, et celle au paramètre ν d'ellipsoïdes. Et l'on vérifierait en même temps, qu'avec ces mêmes conditions, les valeurs d'x, y, z, fournies par les expressions (28), seront effectivement toujours réelles.

elles un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, et un autre à deux nappes. Cela posé, l'identité de forme entre les équations des trois familles de surfaces (25) montre évidemment que la propriété, que nous venons de reconnaître en ces termes à la surface donnée relativement à ses lignes de courbure, appartient tout aussi bien à l'une quelconque de ces trois familles de surfaces, c'est-à-dire que chacune d'elles est coupée par les deux autres suivant ses lignes de courbure, attendu que l'on retomberait toujours sur le même système d'équations (25), en prenant pour surface donnée, à la place de l'équation (3), l'une quelconque d'entre elles. La tangente à l'intersection de deux quelconques de ces surfaces est donc normale à la troisième, ce qui revient à dire que les trois familles de surfaces forment un système triple orthogonal (*), lequel sera évidemment en outre triplement isotherme, eu égard au type commun de chacune de ces familles de surfaces, type que nous avons choisi dans l'équation (3) précisément en vue de ce résultat.

Notre but, en établissant la proposition à laquelle nous venons ainsi d'arriver, était principalement, avons-nous dit en posant la question, de nous procurer un point d'appui sur lequel l'on pourra baser, si l'on veut, la seconde méthode pour la détermination des surfaces du système dans le cas le plus général, que nous allons développer dans la Note suivante. Mais en attendant, comme application immédiate et conclusion de la présente, l'on

---

(*) En effet, si l'on désigne par A, B, C les trois courbes d'intersection deux à deux des trois surfaces (A), (B), (C) représentées par les équations (25), courbes qui seront en même temps, d'après ce que nous venons d'établir, les deux systèmes de lignes de courbure de ces surfaces, en entendant, pour la symétrie, que B et C soient ainsi les deux lignes de courbure de la surface (A), C et A celles de la surface (B), et A et B celles de la surface (C), il est clair que l'intersection C étant à la fois normale, à A comme ligne de courbure conjuguée relativement à la surface (B), et à B comme ligne de courbure conjuguée relativement à la surface (A), la tangente de C sera normale aux tangentes de A et de B, c'est-à-dire au plan tangent de C qui contient ces deux droites; ou, en d'autres termes, l'intersection des deux surfaces (A) et (B) sera normale à la troisième (C), ce qui est précisément le caractère essentiel (ou la définition) du système triple orthogonal de surfaces.

Bien que cette *réciproque* du théorème de CHARLES DUPIN ne soit certes pas difficile à démontrer, comme on ne la trouve établie, ni même énoncée, dans la plupart des traités d'Analyse, nous n'avons pas cru inutile, pour une entière rigueur, de l'indiquer explicitement ici en quelques mots.

peut déjà se servir du dit résultat, pour parvenir beaucoup plus rapidement et plus facilement à la solution du même problème général, en empruntant seulement le point de départ et les données de la première méthode que nous avons développée tout au long dans notre Chapitre V, car l'on sera ainsi dispensé de procéder successivement au calcul effectif et à l'intégration générale du système d'équations différentielles totales (87) ou (117), dont le développement a rempli presque la totalité de ce Chapitre.

En effet, nous avons reconnu, avant tout calcul, en exposant les grandes lignes de cette méthode, que la solution la plus générale du problème devait contenir seulement *dix* constantes arbitraires, dont trois simplement additives par rapport aux coordonnées x, y, z.

Or, si nous effectuons dans les résultats précédents un simple changement de coordonnées rectilignes, c'est-à-dire si nous posons

$$(29)\qquad \begin{cases} x' = x'_0 + \alpha' x + \alpha'' y + \alpha''' z, \\ y' = y'_0 + \beta' x + \beta'' y + \beta''' z, \\ z' = z'_0 + \gamma' x + \gamma'' y + \gamma''' z, \end{cases}$$

x, y, z désignant expressément dans ces formules les trois fonctions des coordonnées λ, μ, ν définies par les deux systèmes équivalents (28) ou (25), l'on voit que les expressions des coordonnées x', y', z', ainsi entendues, contiendront bien alors, d'après les équations que nous venons d'écrire, les dix constantes arbitraires demandées, savoir : en premier lieu, les quatre constantes a^2, b^2, c^2, d^2 existant antérieurement dans les équations (25) ou (28); puis les trois constantes simplement additives x'_0, y'_0, z'_0; et enfin trois autres, à prendre comme l'on voudra, au nombre, ou en fonction, des neuf cosinus α', β', ... α'', ... γ''', liés entre eux par hypothèse par les six relations connues, qui n'en laissent subsister que trois seulement d'arbitraires. Dès lors ces dernières équations (29), après substitution des valeurs de x, y, z fournies par les équations (28), constitueront donc bien de nouveau la solution la plus générale du problème, et par conséquent le système de surfaces (25) sera géométriquement le type le plus général du système orthogonal triplement isotherme.

NOTE III

SUR UN AUTRE MODE DE DÉTERMINATION DES FAMILLES DE SURFACES QUI COMPOSENT LE SYSTÈME DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL.

Nous avons dit, au début du Chapitre V, en posant le problème spécial que nous nous proposions d'y traiter, à savoir la recherche de l'expression générale de chaque coordonnée rectiligne en fonction des coordonnées curvilignes, ou, ce qui revient au même, la détermination exacte des familles de surfaces qui composeront le système orthogonal, que cette dernière question pouvait être abordée par deux voies différentes, inverses en quelque sorte l'une de l'autre, et pour ménager l'attention et la patience du Lecteur, nous n'avons développé dans ce même Chapitre V que celle des deux méthodes qui devait le conduire au but par le chemin le plus direct et le plus rapide. Mais l'autre méthode, dont nous avons également indiqué en quelques mots sommaires les grandes lignes et les traits principaux, même après la possession déjà acquise de la solution du problème, nous semble néanmoins offrir encore un certain intérêt, ne fût-ce que pour corroborer avec plus de certitude les résultats fournis par la première méthode, et sans parler des conséquences importantes que nous nous proposons d'en tirer dans l'une des Notes suivantes. Si donc l'on veut bien nous permettre de l'exposer à son tour dans cet Appendice, la question, dans son ensemble, paraîtra sans doute ensuite mieux étudiée, et la théorie du Système Isotherme plus complètement possédée, lorsqu'elle aura été de cette façon successivement abordée et éclairée par deux côtés absolument différents, pour arriver dans les deux cas exactement à la même conclusion.

L'esprit de cette seconde méthode consistera, avons-nous dit (p. 336), à l'inverse de la première, à intégrer d'abord isolé-

ment les trois équations de gauche (5) ou (20) du Chapitre III, qui ne contiennent chacune qu'une seule inconnue u, et à disposer ultérieurement des arbitraires introduites par les intégrales générales ainsi obtenues, de manière à vérifier ensuite simultanément les trois autres équations, de droite, du même groupe. Mais pour débarrasser également ce nouveau calcul, de même que le premier, de la difficulté spéciale inhérente à la présence des fonctions elliptiques, nous introduirons de nouveau pour variables indépendantes, à la place des coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ, les fonctions Φ, Ψ, Π ou λ, μ, ν de ces variables, définies par les équations (83) ou (112) du Chapitre V, ainsi que nous l'avons déjà fait pour l'exposition et le développement de notre première méthode; et alors les six équations en question, qui seront devenues par cette transformation les équations (134[bis]) dudit Chapitre, pourront être également représentées par les deux types

$$(1) \qquad \Delta_1^2\lambda.\left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 + \Delta_1^2\mu.\left(\frac{u}{\mu}\right)^2 + \Delta_1^2\nu.\left(\frac{u}{\nu}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \Delta_1^2\lambda.\frac{u}{\lambda}\frac{v}{\lambda} + \Delta_1^2.\mu\frac{u}{\mu}\frac{v}{\mu} + \Delta_1^2\nu.\frac{u}{\nu}\frac{v}{\nu} = 0,$$

qui figureront respectivement chacun des deux groupes, soit de gauche, soit de droite, de ces mêmes équations, en ayant recours de nouveau à la notation synthétique dont nous avons déjà fait usage au début de ce même Chapitre V. Et, partant de là, si nous remettons dans ces dernières équations, à la place de $\Delta_1^2\lambda$, $\Delta_1^2\mu$, $\Delta_1^2\nu$, leurs valeurs correspondantes aux expressions (75), trouvées à la fin du Chapitre IV pour les fonctions Φ, Ψ, Π, savoir

$$\Delta_1^2\lambda = 4d^2\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}, \quad \Delta_1^2\mu = 4d^2\frac{f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}, \quad \Delta_1^2\nu = 4d^2\frac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)},$$

et, si nous les multiplions en même temps par le produit

$$(3) \qquad \Theta = (\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu),$$

comme nous l'avons fait dans le Chapitre V pour mettre l'équation (137) sous la forme (138), on voit, qu'en divisant alors par le facteur constant $4d^2$, les six équations du problème actuel seront figurées par les deux types

$$(4) \qquad (\mu - \nu) f(\lambda) \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + (\nu - \lambda) f(\mu) \left(\frac{du}{d\mu}\right)^2 + (\lambda - \mu) f(\nu) \left(\frac{du}{d\nu}\right)^2 + \frac{\Theta}{4d^2} = 0,$$

$$(5) \qquad (\mu - \nu) f(\lambda) \frac{du}{d\lambda}\frac{dv}{d\lambda} + (\nu - \lambda) f(\mu) \frac{du}{d\mu}\frac{dv}{d\mu} + (\lambda - \mu) f(\nu) \frac{du}{d\nu}\frac{dv}{d\nu} = 0,$$

dont la première n'est autre que ladite équation (137) du même Chapitre, eu égard à la définition des quantités Λ, M, N que nous y considérions.

I

La question étant ainsi posée, pour avoir toutes les solutions possibles de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (4), nous adopterons la méthode générale de Lagrange, qui ramène la formation de toutes ces solutions sans exception à la seule possession d'une intégrale complète, et pour obtenir cette solution complète elle-même, nous imiterons le procédé employé chaque fois par Jacobi, dans l'application de sa méthode d'intégration des équations de la Dynamique (*), pour l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction qu'il nomme *fondamentale,* et qui consiste à composer cette solution d'une somme de trois solutions particulières ne dépendant chacune que d'une seule variable.

A cet effet, nous récrirons d'abord cette équation proposée (4), en y introduisant, à l'exemple de Jacobi, deux constantes indéterminées U et V, au moyen d'une somme de termes identiquement nulle, et effectuant le développement du produit Θ (3), de

(*) VORLESUNGEN, 24e Leçon, pp. 184-185; 25e Leçon, p. 191; 28e Leçon, pp. 213-214; 29e Leçon, pp. 222 et 228.

la façon suivante

$$(\mu-\nu)f(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2+(\nu-\lambda)f(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2+(\lambda-\mu)f(\nu)\left(\frac{du}{d\nu}\right)^2$$
$$-\frac{1}{4d^2}\left[(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2\right]$$
$$-\frac{1}{4d^2}\left[(\mu-\nu)(U\lambda+V)+(\nu-\lambda)(U\mu+V)+(\lambda-\mu)(U\nu+V)\right]=0,$$

ou, plus simplement :

$$(\mu-\nu)\left[f(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\lambda^2+U\lambda+V)\right]+(\nu-\lambda)\left[f(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\mu^2+U\mu+V)\right]$$
$$+(\lambda-\mu)\left[f(\nu)\left(\frac{du}{d\nu}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\nu^2+U\nu+V)\right]=0.$$

Et alors, si nous cherchons encore, comme lui, à vérifier cette équation au moyen d'une somme de trois termes tels que

$$(6)\qquad u=u_\lambda+u_\mu+u_\nu,$$

qui ne soient fonctions respectivement que de $\lambda,\mu,\nu,$ et donnent par suite

$$(6^{bis})\qquad \frac{du}{d\lambda}=\frac{du_\lambda}{d\lambda},\qquad \frac{du}{d\mu}=\frac{du_\mu}{d\mu},\qquad \frac{du}{d\nu}=\frac{du_\nu}{d\nu},$$

il est clair qu'il suffira pour cela de satisfaire séparément aux trois équations

$$\left\{\begin{array}{l} f(\lambda)\left(\frac{du_\lambda}{d\lambda}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\lambda^2+U\lambda+V)=0,\qquad f(\mu)\left(\frac{du_\mu}{d\mu}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\mu^2+U\mu+V)=0,\\ \qquad\qquad f(\nu)\left(\frac{du_\nu}{d\nu}\right)^2-\frac{1}{4d^2}(\nu^2+U\nu+V)=0,\end{array}\right.$$

lesquelles détermineront les trois fonctions u_λ, u_μ, u_ν, et qui, assignant à leurs dérivées respectives les trois valeurs

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_\lambda}{d\lambda} &= \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}, & \frac{du_\mu}{d\mu} &= \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}, \\ & & \frac{du_\nu}{d\nu} &= \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}, \end{aligned} \right.$$

fourniront immédiatement, pour ces fonctions elles-mêmes, les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} u_\lambda &= \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\,d\lambda+\text{const.}, & u_\mu &= \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\,d\mu+\text{const.}, \\ & & u_\nu &= \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\,d\nu+\text{const.}. \end{aligned} \right.$$

Dès lors, en reportant dans l'égalité (6), on voit que l'expression

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} u = \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\,d\lambda &+ \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\,d\mu \\ &+ \frac{1}{2d}\int\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\,d\nu + W, \end{aligned} \right.$$

qui renferme les trois constantes indéterminées U, V, W, sera une solution complète, permettant d'en tirer, conformément à la théorie de Lagrange, toutes les solutions possibles de cette même équation.

D'après cette théorie générale, ces solutions sont de trois sortes différentes, en sus de l'intégrale complète elle-même dans laquelle U, V, W demeurent de simples constantes, savoir : les intégrales dites *singulières*, les intégrales *semi-singulières*, et l'intégrale dite *générale*, solutions que l'on déduirait de l'expression ci-dessus (8) respectivement de la façon suivante.

1° *Intégrale singulière.* — Pour l'obtenir, il faudrait joindre à cette équation (8) elle-même, en vue de déterminer les trois fonctions U, V, W, les trois équations

$$\frac{\partial u}{\partial U}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial V}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial W}=0.$$

Or, la dernière de ces trois équations impliquant contradiction dans le cas actuel, puisqu'elle s'écrirait $1 = 0$, il ne peut donc pas exister de solution de cette sorte dans la question présente.

2° *Intégrale semi-singulière.* — Elle s'obtiendrait en se donnant arbitrairement deux des indéterminées U, V, W en fonction de la troisième, soit en posant, par exemple,

$$(9) \qquad U = f_1(W), \qquad V = f_2(W),$$

et déterminant ensuite W en λ, μ, ν, en joignant aux deux précédentes l'équation

$$\frac{du}{dW} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial U} f'_1(W) + \frac{\partial u}{\partial V} f'_2(W) + \frac{\partial u}{\partial W} = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'expression (8) de u, et multipliant par $4d$, celle-ci

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{\lambda f'_1(W) + f'_2(W)}{\sqrt{f(\lambda)[\lambda^2 + \lambda f_1(W) + f_2(W)]}} d\lambda + \int \frac{\mu f'_1(W) + f'_2(W)}{\sqrt{f(\mu)[\mu^2 + \mu f_1(W) + f_2(W)]}} d\mu \\ &\qquad + \int \frac{\nu f'_1(W) + f'_2(W)}{\sqrt{f(\nu)[\nu^2 + \nu f_1(W) + f_2(W)]}} d\nu + 4d = 0, \end{aligned} \right.$$

laquelle, donnant séparément W, permettra dès lors d'en conclure ensuite successivement, d'abord U et V par les équations précédentes (9), puis de ces trois valeurs, celle de u elle-même à l'aide de l'expression (8), chacune des quadratures y étant supposée effectuée au préalable, en y traitant U et V comme des constantes.

3° *Intégrale générale.* — Cette dernière enfin s'obtiendra en se donnant de même arbitrairement l'une des trois quantités U, V, W en fonction des deux autres, par exemple en posant $W = \mathcal{F}(U, V)$, et déterminant alors U et V en λ, μ, ν, à l'aide des deux équations, calculées dans cette hypothèse, $\frac{du}{dU} = 0$ et $\frac{du}{dV} = 0$, ou

$$(11) \qquad \frac{\partial u}{\partial U} + \frac{\partial u}{\partial W}\frac{dW}{dU} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial u}{\partial W}\frac{dW}{dV} = 0,$$

c'est-à-dire, en agissant comme tout à l'heure, et séparant en deux membres, par le moyen des deux équations simultanées

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}}+\int\frac{\mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)}}+\int\frac{\nu d\nu}{\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}}=-4d.\frac{dW}{dU}, \\ \displaystyle\int\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)}}+\int\frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}}=-4d.\frac{dW}{dV}, \end{cases}$$

puis, déduisant des deux valeurs ainsi obtenues pour U et V celle de W au moyen de l'hypothèse admise $W=\mathcal{F}(U, V)$, et enfin reportant de nouveau, pour avoir celle de u, ces trois valeurs dans l'expression de la solution complète (8), après y avoir encore effectué préalablement chacune des quadratures en y regardant U et V comme des constantes.

Voyons maintenant ce que deviendront chacune de ces intégrales, ainsi fournies par l'expression (8) pour chacune des trois coordonnées x, y, z, par la condition de vérifier ensuite simultanément les trois équations figurées synthétiquement par le second type (5), c'est-à-dire le groupe de droite du système proposé (134bis) du Chapitre V.

Si chaque coordonnée u n'était astreinte à satisfaire qu'à la seule équation du premier ordre (4), les fonctions f_1 et f_2 dans un cas, ou $\mathcal{F}$ dans l'autre, c'est-à-dire U et V ou bien W, demeurant alors complètement arbitraires, pour obtenir une solution quelconque, soit à l'aide de l'intégrale semi-singulière, soit à l'aide de l'intégrale générale, il faudrait nécessairement commencer par se donner arbitrairement l'une ou les autres de ces fonctions, selon le cas, et l'on en déduirait alors, ainsi que nous venons de l'expliquer, les expressions en λ, μ, ν, soit de W par la seule équation (10) pour l'intégrale semi-singulière, soit de U et V par les deux équations simultanées (12) pour l'intégrale générale. Mais, dans la question actuelle, en raison de la présence, en sus des trois équations isolées (4), des trois autres équations simultanées (5), il n'en va plus plus ainsi, et la série des opérations ana-

lytiques à accomplir pour obtenir une solution s'imposera, comme on va le voir, précisément en ordre inverse.

Dans la question présente, en effet, les trois coordonnées u devant vérifier, non plus seulement isolément les trois équations du premier type (4), mais encore simultanément les trois autres du second type (5), chaque coordonnée u devra donc vérifier de nouveau, encore isolément, les trois équations du second ordre de Lamé (159) du chapitre V, qui sont une conséquence différentielle des six équations précitées, ainsi que nous l'avons établi au début de ce même Chapitre (pp. 347-351). Or, ces trois équations du second ordre déterminant complètement en λ, μ, ν, avec deux constantes arbitraires seulement, comme nous le verrons tout à l'heure, les valeurs des indéterminées U et V pour chaque coordonnée u en particulier, à l'inverse de ce que nous venons de dire à l'instant, ce sera au contraire forcément la fonction W qui résultera, par les équations (12) ou (9), selon que la solution sera fournie par l'intégrale générale ou semi-singulière, des valeurs ainsi imposées à l'avance aux deux fonctions U et V par les trois équations de Lamé, que nous venons de rappeler.

En effet, si nous représentons encore, comme dans notre Chapitre V, par Λ, M, N, les trois dérivées de u, c'est-à-dire si nous faisons de nouveau

$$(13)\qquad \Lambda = \frac{du}{d\lambda}, \qquad M = \frac{du}{d\mu}, \qquad N = \frac{du}{d\nu},$$

nous aurons alors entre ces trois quantités Λ, M, N, non seulement l'équation en termes finis

$$(14)\qquad (\mu - \nu) f(\lambda) \Lambda^2 + (\nu - \lambda) f(\mu) M^2 + (\lambda - \mu) f(\nu) N^2 = -\frac{\Theta}{4d^2},$$

qui n'est autre chose que l'équation aux dérivées partielles proposée (4), transcrite avec ces nouvelles notations; mais encore, en particulier, les six relations différentielles du premier ordre, qui forment la dernière ligne de notre système (116) dudit

Chapitre, savoir

$$(15)\qquad \frac{dN}{d\mu}=\frac{dM}{d\nu}=\frac{N-M}{2(\mu-\nu)},\quad \frac{d\Lambda}{d\nu}=\frac{dN}{d\lambda}=\frac{\Lambda-N}{2(\nu-\lambda)},\quad \frac{dM}{d\lambda}=\frac{d\Lambda}{d\mu}=\frac{M-\Lambda}{2(\lambda-\mu)},$$

et qui ne sont de même que les trois équations (159) de Lamé, considérées à la fois sous la double forme dont elles deviennent susceptibles avec ce même système de notation.

Cela posé, si nous récrivons les deux premières, par exemple, en les séparant, ainsi qu'il suit

$$\frac{dN}{d\mu}=\frac{N-M}{2(\mu-\nu)},\qquad \frac{dM}{d\nu}=\frac{M-N}{2(\nu-\mu)},$$

puis que nous les multiplions alors respectivement par 2N et 2M, et que nous agissions de même pour les quatre autres équations précédentes (15), elles s'offriront dès lors à nous sous la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d.N^2}{d\mu}=\dfrac{N(N-M)}{\mu-\nu}, & \dfrac{d.\Lambda^2}{d\nu}=\dfrac{\Lambda(\Lambda-N)}{\nu-\lambda}, & \dfrac{d.M^2}{d\lambda}=\dfrac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu}, \\ \dfrac{d.M^2}{d\nu}=\dfrac{M(M-N)}{\nu-\mu}, & \dfrac{d.N^2}{d\lambda}=\dfrac{N(N-\Lambda)}{\lambda-\nu}, & \dfrac{d.\Lambda^2}{d\mu}=\dfrac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda}. \end{array}\right.$$

D'autre part, d'après la théorie de Lagrange que nous avons appliquée, les dérivées de la fonction inconnue u, propres, soit à l'intégrale générale, soit à l'intégrale semi-singulière, auront la même expression que celles fournies par l'intégrale complète, à la seule condition d'y considérer U et V, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions de λ, μ, ν, satisfaisant aux équations (12), ou (10) et (9), selon le cas, c'est-à-dire que les expressions des dérivées Λ, M, N se confondront dans cette hypothèse avec les expressions (6bis) ou (7), que nous allons en conséquence récrire ici en leur attribuant désormais le sens précis qui vient d'être spécifié à l'instant :

$$(17)\qquad \Lambda=\frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}},\quad M=\frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}},\quad N=\frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}.$$

Dès lors, les expressions de leurs carrés, savoir

$$(18)\qquad \Lambda^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\lambda^2 + U\lambda + V}{f(\lambda)},\qquad M^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\mu^2 + U\mu + V}{f(\mu)},\qquad N^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\nu^2 + U\nu + V}{f(\nu)},$$

donnant par la différentiation respectivement les valeurs

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d.\Lambda^2}{d\mu} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\lambda\dfrac{dU}{d\mu} + \dfrac{dV}{d\mu}}{f(\lambda)}, & \dfrac{d.M^2}{d\nu} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\mu\dfrac{dU}{d\nu} + \dfrac{dV}{d\nu}}{f(\mu)}, & \dfrac{d.N^2}{d\lambda} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\nu\dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda}}{f(\nu)}, \\ \dfrac{d.\Lambda^2}{d\nu} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\lambda\dfrac{dU}{d\nu} + \dfrac{dV}{d\nu}}{f(\lambda)}, & \dfrac{d.M^2}{d\lambda} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\mu\dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda}}{f(\mu)}, & \dfrac{d.N^2}{d\mu} = \dfrac{1}{4d^2}\,\dfrac{\nu\dfrac{dU}{d\mu} + \dfrac{dV}{d\mu}}{f(\nu)}, \end{array}\right.$$

la simple comparaison des valeurs des mêmes dérivées, empruntées successivement à ces deux tableaux (16) et (19), qui les fournissent l'un et l'autre présentées seulement dans un ordre différent, établira immédiatement entre les six dérivées de U et de V les six relations linéaires :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\Lambda(\Lambda - M)}{\mu - \lambda} = \dfrac{\lambda\dfrac{dU}{d\mu} + \dfrac{dV}{d\mu}}{4d^2.f(\lambda)}, & \dfrac{\Lambda(\Lambda - N)}{\nu - \lambda} = \dfrac{\lambda\dfrac{dU}{d\nu} + \dfrac{dV}{d\nu}}{4d^2.f(\lambda)}, \\ \dfrac{M(M - N)}{\nu - \mu} = \dfrac{\mu\dfrac{dU}{d\nu} + \dfrac{dV}{d\nu}}{4d^2.f(\mu)}, & \dfrac{M(M - \Lambda)}{\lambda - \mu} = \dfrac{\mu\dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda}}{4d^2.f(\mu)}, \\ \dfrac{N(N - \Lambda)}{\lambda - \nu} = \dfrac{\nu\dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda}}{4d^2.f(\nu)}, & \dfrac{N(N - M)}{\mu - \nu} = \dfrac{\nu\dfrac{dU}{d\mu} + \dfrac{dV}{d\mu}}{4d^2.f(\nu)}. \end{array}\right.$$

Et, dès lors, il suffira évidemment de rapprocher simplement, parmi ces équations, les deux qui contiennent dans leurs seconds membres les mêmes dérivées de U et V, par exemple les deux suivantes, dont nous renversons les deux membres,

$$(21)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda} = 4d^2.f(\mu)\,\dfrac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu}, \\[2ex] \nu \dfrac{dU}{d\lambda} + \dfrac{dV}{d\lambda} = 4d^2.f(\nu)\,\dfrac{N(N-\Lambda)}{\lambda-\nu}, \end{cases}$$

pour pouvoir en tirer isolément les expressions des deux dérivées $\frac{dU}{d\lambda}$ et $\frac{dV}{d\lambda}$ en λ, μ, ν, Λ, M, N, savoir

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\lambda} = \quad 4d^2.\dfrac{(\nu-\lambda)f(\mu)\,M(M-\Lambda) + (\lambda-\mu)f(\nu)N(N-\Lambda)}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}, \\[2ex] \dfrac{dV}{d\lambda} = -4d^2.\dfrac{\nu(\nu-\lambda)f(\mu)M(M-\Lambda) + \mu(\lambda-\mu)f(\nu)N(N-\Lambda)}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}, \end{cases}$$

et de même pour les quatre autres dérivées de U et V.

Pour faciliter l'écriture de ces valeurs nous ferons, en tenant compte de la définition (3),

$$(22)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-M), & \mathcal{D} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-N), \\[2ex] \mathcal{B} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\nu-\lambda)f(\mu)M(M-N), & \mathcal{E} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\nu-\lambda)f(\mu)M(M-\Lambda), \\[2ex] \mathcal{C} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\lambda-\mu)f(\nu)N(N-\Lambda), & \mathcal{F} = \dfrac{4d^2}{\Theta}(\lambda-\mu)f(\nu)N(N-M), \end{cases}$$

et alors, eu égard à la permutation évidente de ces deux séries de quantités, il est manifeste que les six équations (20) fourniront, en opérant comme nous venons de le faire pour les deux précédentes (21), les six valeurs

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{d\lambda} = \mathcal{C} + \mathcal{E}, & \dfrac{dU}{d\mu} = \mathcal{A} + \mathcal{F}, & \dfrac{dU}{d\nu} = \mathcal{B} + \mathcal{D}, \\[2ex] \dfrac{dV}{d\lambda} = -(\mu\mathcal{C} + \nu\mathcal{E}), & \dfrac{dV}{d\mu} = -(\nu\mathcal{A} + \lambda\mathcal{F}), & \dfrac{dV}{d\nu} = -(\lambda\mathcal{B} + \mu\mathcal{D}). \end{cases}$$

Or, ainsi que nous l'avons déjà dit à l'occasion de notre pre-

mière méthode, ce résultat équivaut à dire que les deux fonctions inconnues U et V sont astreintes à vérifier le système des deux équations différentielles totales

$$(24)\quad \begin{cases} dU = \quad (\mathcal{C} + \mathcal{E})\,d\lambda + (\mathcal{A} + \mathcal{F})\,d\mu + (\mathcal{B} + \mathcal{D})\,d\nu, \\ dV = -(\mu\mathcal{C} + \nu\mathcal{E})\,d\lambda - (\nu\mathcal{A} + \lambda\mathcal{F})\,d\mu - (\lambda\mathcal{B} + \mu\mathcal{D})\,d\nu, \end{cases}$$

les symboles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ désignant pour abréger les expressions (22), dans lesquelles Λ, M, N, et Θ représentent eux-mêmes les précédentes (17) et (3).

Pour qu'il puisse exister une solution du problème, il faudra donc tout d'abord que ce dernier système soit encore complètement intégrable, et, dès lors, en supposant cette condition remplie, les deux fonctions U et V relatives à chaque coordonnée u se trouveront déterminées, comme nous l'avions annoncé, avec deux constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'on les obtiendra, par l'intégration de ce système, sous la forme de deux expressions telles que

$$(25)\qquad U = F_1(\lambda, \mu, \nu, C_1, C_2), \qquad\qquad V = F_2(\lambda, \mu, \nu, C_1, C_2).$$

Les valeurs ainsi imposées à l'avance aux deux fonctions U et V étant supposées acquises de cette façon, voyons maintenant s'il sera toujours possible, avec les mêmes expressions (25) correspondantes respectivement à chacune des trois coordonnées rectilignes, d'obtenir, par le moyen de la formule (8), une expression de u qui soit une solution de l'équation (4), c'est-à-dire, en d'autres termes, de trouver une troisième fonction $W = \mathcal{F}(U, V)$ qui vérifie conjointement avec elles les deux équations (11) ou (12); car rien ne garantit à l'avance que les six équations (4) et (5) soient compatibles, c'est-à-dire qu'il soit possible de trouver des expressions de x, y, z en λ, μ, ν, vérifiant à la fois ces six équations.

Il convient pour cela d'examiner séparément l'hypothèse où la solution cherchée pour u sera fournie par l'intégrale semi-singulière, et celle où elle sera procurée par l'intégrale géné-

rale, hypothèses qui sont les deux seules possibles, puisque nous avons vu qu'il ne pouvait exister de solution singulière des équations aux dérivées partielles du type (4).

A. Pour le cas de l'intégrale semi-singulière d'abord, dans lequel la troisième fonction inconnue W sera déterminée *algébriquement,* avons-nous dit, par la seule équation (10), les quadratures y étant supposées effectuées au préalable en y traitant W comme une constante, trois conditions devront être successivement remplies, pour que cette intégrale puisse fournir une solution du problème, conditions dont on aperçoit aisément la nécessité à l'aide des considérations suivantes.

1° Dans cette hypothèse, à la vérité, il sera bien toujours possible, en théorie du moins (c'est-à-dire sauf les difficultés propres à la résolution algébrique), pour une forme déterminée de l'une des deux fonctions f_1 ou f_2, de calculer, en partant des expressions déjà acquises (25) de U et V, à l'aide de l'équation correspondante (9), une valeur corrélative pour la troisième inconnue W, mais il est bien facile de voir qu'alors, eu égard auxdites valeurs (25) de U et V, ni l'une ni l'autre de ces deux fonctions f_1 et f_2 ne pourra plus être arbitraire.

En effet, les hypothèses (9) relatives à ce cas, qui donnent par la différentiation

$$dU = f'_1(W)\,dW, \qquad dV = f'_2(W)\,dW,$$

pouvant évidemment toujours, en résolvant la première de ces mêmes équations par rapport à W, et substituant ensuite dans la seconde, être présentées sous cette autre forme complètement équivalente

$$(26) \qquad W = \mathcal{F}_1(U), \qquad V = F(U),$$

qui donnera de même par la différentiation, conjointement avec les résultats précédents,

$$(27) \qquad \mathcal{F}'_1(U) = \frac{dW}{dU} = \frac{1}{f'_1(W)}, \qquad F'(U) = \frac{dV}{dU} = \frac{f'_2(W)}{f'_1(W)},$$

et

$$\frac{\frac{dV}{d\lambda}}{\frac{dU}{d\lambda}} = \frac{\frac{dV}{d\mu}}{\frac{dU}{d\mu}} = \frac{\frac{dV}{d\nu}}{\frac{dU}{d\nu}} = F'(U),$$

on voit, par l'égalité de ces trois derniers rapports, qu'il faudra, en premier lieu, que les valeurs (25) trouvées pour U et V vérifient deux quelconques des trois égalités, équivalentes aux précédentes,

$$(28) \qquad \frac{D(U, V)}{D(\mu, \nu)} = 0, \qquad \frac{D(U, V)}{D(\nu, \lambda)} = 0, \qquad \frac{D(U, V)}{D(\lambda, \mu)} = 0;$$

et, en supposant cette condition remplie, il est bien clair que, dans la seconde équation (26), U et V étant les fonctions déterminées (25), la fonction F sera, elle aussi, une fonction complètement déterminée.

2° Cela posé, si nous récrivons à présent l'équation (10), qui, d'après la théorie relative à ce cas, doit nous donner également l'inconnue W, en faisant passer le dernier terme dans le second membre, et la divisant alors par f'_1 (W), ainsi qu'il suit

$$(28^{\text{bis}}) \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{\lambda + \frac{f'_2(W)}{f'_1(W)}}{\sqrt{f(\lambda)^2[\lambda + \lambda f_1(W) + f_2(W)]}} d\lambda + \int \frac{\mu + \frac{f'_2(W)}{f'_1(W)}}{\sqrt{f(\mu)[\mu^2 + \mu f_1(W) + f_2(W)]}} d\mu \\ &\qquad + \int \ldots\ldots\ldots\ldots d\nu = -4d.\frac{1}{f'_1(W)}, \end{aligned} \right.$$

il est clair qu'en ayant égard aux égalités (9), (26), et (27), cette dernière équation équivaudra dès lors à la suivante :

$$(29) \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{\lambda + F'(U)}{\sqrt{f(\lambda)[\lambda^2 + \lambda U + F(U)]}} d\lambda + \int \frac{\mu + F'(U)}{\sqrt{f(\mu)[\mu^2 + \mu U + F(U)]}} d\mu \\ &\qquad + \int \ldots\ldots\ldots\ldots d\nu = -4d.\mathcal{F}'_1(U). \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, il faudra, comme seconde condition nécessaire, que le premier membre de cette dernière équation, qui se présentera, une fois les quadratures effectuées, sous la forme d'une fonction déterminée de λ, μ, ν, et U, puisse être réduit à l'aide des équations (25) et (26), c'est-à-dire simplement à l'aide des deux suivantes

$$U = F_1(\lambda, \mu, \nu, C_1, C_2), \qquad F(U) = F_2(\lambda, \mu, \nu, C_1, C_2),$$

à une autre fonction déterminée de U seulement, à l'exclusion de λ, μ, ν, auquel cas cette même équation (29) déterminera évidemment, par simple quadrature, sauf une constante additive, la fonction $\mathcal{F}_1$ ou W. Et dès lors, les deux équations (26) étant ainsi déterminées, il est clair que les équations équivalentes (9), c'est-à-dire les fonctions inverses f_1 et f_2 se trouveront bien également déterminées avec une constante arbitraire, ce qui justifie pleinement, pour ce cas déjà, les circonstances que nous avons annoncées un peu plus haut (1°, p. 53 et p. 48).

3° Cela fait, enfin, il faudra, comme troisième condition nécessaire, que les expressions obtenues de cette façon pour les fonctions f_1 et f_2 étant reportées dans l'équation (28bis), on puisse en déduire alors *algébriquement* une valeur de W en λ, μ, ν concordant exactement avec la première (26), U étant l'expression (25), et $\mathcal{F}_1$ la fonction déduite *par quadrature* de l'équation (29), ainsi que nous venons de l'expliquer.

Ces trois conditions étant ainsi reconnues nécessaires, voyons maintenant si elles sont compatibles avec les données ou les résultats déjà acquis dans la question.

Si nous calculons à cet effet le premier des trois déterminants fonctionnels (28), à l'aide des expressions (23), qui sont par hypothèse celles des dérivées de U et V, [puisqu'on suppose expressément ces expressions obtenues par l'intégration du système d'équations différentielles totales (24), qui est complètement équivalent à ces mêmes égalités (23)], nous trouverons successivement, en réduisant, puis ayant égard aux définitions (22), et récrivant enfin chaque terme de façon à mettre en

évidence la symétrie du résultat,

$$\frac{D(U,V)}{D(\mu,\ \nu)} = \frac{dU}{d\mu}\frac{dV}{d\nu} - \frac{dU}{d\nu}\frac{dV}{d\mu}$$

$$= -\left[(\mathcal{A} + \mathcal{F})(\lambda\mathcal{B} + \mu\mathcal{D}) - (\mathcal{B} + \mathcal{D})(\nu\mathcal{A} + \lambda\mathcal{F})\right]$$

$$= -\left[\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} + \lambda\mathcal{F}\mathcal{B} + \mu\mathcal{A}\mathcal{D} + \mu\mathcal{F}\mathcal{D}\right.$$

$$\left. - (\nu\mathcal{A}\mathcal{B} + \nu\mathcal{A}\mathcal{D} + \lambda\mathcal{F}\mathcal{B} + \lambda\mathcal{F}\mathcal{D})\right]$$

$$= -\left[(\mu - \nu)\mathcal{A}\mathcal{D} - (\nu - \lambda)\mathcal{A}\mathcal{B} - (\lambda - \mu)\mathcal{D}\mathcal{F}\right]$$

$$= -\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2\left[(\mu-\nu).(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-M).(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-N)\right.$$

$$- (\nu-\lambda).(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-M).(\nu-\lambda)f(\mu)M(M-N)$$

$$\left. - (\lambda-\mu)(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda(\Lambda-N).(\lambda-\mu)f(\nu)N(N-M)\right]$$

$$= -\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda\left[(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda(\Lambda-M)(\Lambda-N)\right.$$

$$\left. + (\nu-\lambda)^2f(\mu)M(M-N)(M-\Lambda) + (\lambda-\mu)^2f(\nu)N(N-\Lambda)(N-M)\right].$$

Si donc nous convenons de désigner par Ω le facteur entre crochets, c'est-à-dire la quantité symétrique en λ, μ, ν d'une part, et Λ, M, N de l'autre,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega = (\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda(\Lambda-M)(\Lambda-N) &+ (\nu-\lambda)^2f(\mu)M(M-N)(M-\Lambda) \\ &+ (\lambda-\mu)^2f(\nu)N(N-\Lambda)(N-M), \end{aligned}\right.$$

on voit ainsi que les trois déterminants fonctionnels (28) auront respectivement pour expressions

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{D(U,V)}{D(\mu,\ \nu)} &= -\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda.\Omega, \qquad \frac{D(U,V)}{D(\nu,\ \lambda)} = -\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2(\nu-\lambda)f(\mu)M.\Omega, \\ \frac{D(U,V)}{D(\lambda,\ \mu)} &= -\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2(\lambda-\mu)f(\nu)N.\Omega. \end{aligned}\right.$$

Et par conséquent, d'après ce que nous venons d'expliquer, la première des trois conditions nécessaires pour que l'expres-

sion cherchée de u soit fournie par une intégrale semi-singulière de l'équation (4), sera que les trois dérivées Λ, M, N, qui sont déjà astreintes par hypothèse à vérifier les six relations différentielles du premier ordre (15) et l'équation en termes finis (14), vérifient de plus la seconde équation en termes finis $\Omega = 0$, Ω désignant l'expression (30), dans laquelle il n'entre non plus aucune constante arbitraire.

Or, il est bien facile de reconnaître qu'une semblable condition est impossible, et nous serons dispensés, dès lors, de nous préoccuper des deux autres (*).

(*) Il peut venir à l'esprit du Lecteur, au premier abord, que ce simple résultat démontre déjà l'impossibilité d'une solution du problème engendrée par l'intégrale semi-singulière de l'équation (4), par le seul fait que cette équation $\Omega = 0$, lorsqu'on y aura remis pour Λ, M, N leurs valeurs (17), sera alors de la forme $F(U, V, \lambda, \mu, \nu) = 0$, tandis que, d'après l'hypothèse (26) ou (9) relative à ce cas, il ne doit exister entre U et V qu'une relation de la forme $f(U, V) = 0$. Mais cette seule raison ne suffit point à décider la question, car rien ne prouve, avant d'avoir effectué en réalité la substitution que nous venons de dire, qu'après développement et réduction, les variables λ, μ, ν ne disparaitront pas du résultat; ou, même en supposant que cette circonstance ne se produise pas, parce qu'il pourrait fort bien arriver que la forme de cette fonction F fût telle, que l'on pût éliminer à la fois les trois variables λ, μ, ν entre les deux équations (25) et cette équation $F = 0$ ou $\Omega = 0$, et la ramener de la sorte à la forme exigée $f(U, V) = 0$: circonstance qui se réalise précisément, comme nous le verrons tout à l'heure, séparément pour chacune des deux équations (12) ou (32) ci-après, relatives à l'hypothèse suivante d'une solution du problème issue de l'intégrale générale de l'équation (4).

D'autre part, si l'on représente par W_1 le premier membre de l'équation (29), qui doit forcément, suivant ce que nous avons expliqué, se réduire à une fonction de la seule variable U, il est clair que l'on aura de même, relativement à cette nouvelle fonction W_1, les trois conditions

$$\frac{D(U, W_1)}{D(\mu, \nu)} = 0, \qquad \frac{D(U, W_1)}{D(\nu, \lambda)} = 0, \qquad \frac{D(U, W_1)}{D(\lambda, \mu)} = 0,$$

et, si l'on calcule encore ces trois déterminants fonctionnels, on trouvera, en suivant la même voie, et à l'aide des procédés que nous employons dans l'article B ci-après, relatif à l'intégrale générale, pour le calcul d'un déterminant analogue à trois variables, les trois valeurs

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{D(U, W_1)}{D(\mu, \nu)} = \frac{1}{2d.\Theta}\,\frac{(\mu-\nu)\,\Omega_1}{Mf(\mu).Nf(\nu)}, \qquad \frac{D(U, W_1)}{D(\nu, \lambda)} = \frac{1}{2d.\Theta}\,\frac{(\nu-\lambda)\,\Omega_1}{Nf(\nu).\Lambda f(\lambda)}, \\ &\frac{D(U, W_1)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{1}{2d\,\Theta}\,\frac{(\lambda-\mu)\,\Omega_1}{\Lambda f(\lambda).Mf(\mu)}, \end{aligned}\right.$$

En effet, si l'on joint aux huit équations que nous venons de spécifier les six nouvelles équations obtenues par la différentiation en λ, μ, ν de ces deux équations en termes finis, on voit qu'il existera alors quatorze équations distinctes entre les trois dérivées Λ, M, N et leurs dérivées premières, quantités dont le nombre est par conséquent de $3(1+3)=3.4=12$. Il en résultera donc, par l'élimination desdites quantités entre les équations en question, deux relations entre les variables indépendantes λ, μ, ν et les constantes données a^2, b^2, c^2, d^2, mais *sans constantes arbitraires*, dont on puisse disposer pour procurer la vérification desdites équations, quelles que soient les variables λ, μ, ν. Or, ces variables constituant par hypothèse un système de coordonnées, une semblable condition est évidemment impossible, à moins que les deux relations ainsi obtenues ne soient effectivement de simples *identités*, circonstance qui n'a pas lieu dans l'espèce, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, sans qu'il soit besoin pour cela de les calculer intégralement (*).

Ω_1 étant cette fois la quantité

$$\Omega_1 = [\lambda + F'(U)] f(\mu) f(\nu) (M - N) MN + [\mu + F'(U)] f(\nu) f(\lambda) (N - \Lambda) N\Lambda + [\nu + F'(U)] f(\lambda) f(\mu) (\Lambda - M) \Lambda M.$$

Par conséquent, la seconde des conditions sus-indiquées équivaut de nouveau à astreindre les quantités Λ, M, N à vérifier, en outre, des équations déjà spécifiées, la nouvelle équation $\Omega_1 = 0$.

Mais cette équation, à la différence de la précédente $\Omega = 0$, renfermant en plus la fonction U, sa considération ne faciliterait en rien la mise en lumière de la conséquence à laquelle nous nous proposons d'arriver tout à l'heure, à savoir l'incompatibilité de ces nouvelles conditions avec les données antérieures de la question. C'est pourquoi nous ne jugeons pas utile de la calculer, ni même d'en faire mention dans le texte.

(*) Parmi les quatorze équations que nous venons de spécifier, les trois à provenir de la différentiation en λ, μ, ν de l'équation (14) ont déjà été calculées par nous dans notre Chapitre V, car ce sont précisément celles-la mêmes qui nous ont fourni, avec l'aide des trois équations de Lamé, l'expression des trois dérivées quadratiques de u, lesquelles n'entraient pas dans les dites équations de Lamé, ou, ce qui est la même chose, l'expression des trois dérivées $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$, $\frac{dM}{d\mu}$, $\frac{dN}{d\nu}$. L'ensemble de ces trois équations et de celles de Lamé n'est donc autre chose que le groupe (116) de notre Chapitre V. Reproduisant dès lors ici ces mêmes équations, en ayant soin de chasser tous les dénominateurs, afin de n'avoir à considérer dans ce calcul que des expressions entières, et n'écrivant intégralement que celles-là seules dont nous allons avoir à faire usage, les quatorze équations

La solution cherchée ne pourra donc, en aucun cas, être fournie par une intégrale semi-singulière de l'équation aux dérivées partielles envisagée (4).

---

entre lesquelles devra être opérée l'élimination mentionnée ci-dessus seront donc ainsi :

$$(\alpha)\qquad (\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda^2+(\nu-\lambda)f(\mu)M^2+(\lambda-\mu)f(\nu)N^2=-\frac{\Theta}{4d^2},$$

$$(\beta)\qquad \begin{cases} 2\Theta f(\lambda)\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}=[\cdots]\Lambda+\cdots, \qquad 2f\Theta(\mu)\dfrac{dM}{d\mu}=[\cdots]M+\cdots, \\ 2\Theta f(\nu)\dfrac{dN}{d\nu}=\left[(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-2\nu)f(\nu)-\Theta f'(\nu)\right]N+(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda-(\nu-\lambda)^2f(\mu)M, \end{cases}$$

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} 2(\mu-\nu)\dfrac{dN}{d\mu}=2(\mu-\nu)\dfrac{dM}{d\nu}=N-M, \qquad 2(\nu-\lambda)\dfrac{d\Lambda}{d\nu}=2(\nu-\lambda)\dfrac{dN}{d\lambda}=\Lambda-N, \\ \qquad\qquad 2(\lambda-\mu)\dfrac{dM}{d\lambda}=2(\lambda-\mu)\dfrac{d\Lambda}{d\mu}=M-\Lambda, \end{cases}$$

$$(\delta)\qquad \Omega=0,\qquad \frac{d\Omega}{d\lambda}=0,\qquad \frac{d\Omega}{d\mu}=0,\qquad \frac{d\Omega}{d\nu}=0.$$

Cela posé, le calcul d'élimination des douze quantités sus-indiquées entre ces quatorze équations serait sans doute extrêmement laborieux, et peut-être même pratiquement inabordable, en raison de la complication des trois dernières de ces équations, à savoir celles provenant de la différentiation de l'expression Ω (30), dont chacun des trois termes est composé de cinq facteurs variables. Mais heureusement il n'est pas nécessaire, pour avoir l'assurance que les deux équations finales en question, entre les coordonnées λ, μ, ν seules, ne sont pas identiques, d'avoir formé ces équations elles-mêmes intégralement, c'est-à-dire en laissant toutes les quantités qui y figurent complètement indéterminées. Car si ces équations sont bien effectivement identiques, cette identité se maintiendra évidemment pour toutes les valeurs possibles des variables λ, μ, ν ou des constantes a^2, b^2, c^2, et par conséquent il suffit simplement de s'assurer que, pour un système particulier de ces quantités choisi à volonté, cette identité n'a pas lieu, ou, ce qui revient au même, que les quatorze équations précédentes ne pourront être vérifiées à la fois, sans qu'on soit obligé pour cela d'établir des relations inadmissibles entre ces mêmes variables.

C'est à quoi nous arriverons assez facilement en prenant, par exemple, $a^2=0$, $b^2=0$, $c^2=0$, $\nu=0$, et laissant les deux autres variables λ et μ d'ailleurs complètement arbitraires, hypothèse qui, étant introduite dans les définitions (71) du Chapitre IV, (3) et (30) de cette Note, nous donnera les valeurs très simplifiées :

$$(\varepsilon)\qquad f(\nu)=0,\qquad f'(\nu)=0,\qquad f(\lambda)=\lambda^3,\qquad f(\mu)=\mu^3,\qquad \Theta_0=-\lambda\mu(\lambda-\mu),$$

$$(\eta)\qquad \begin{cases} \Omega_0=\mu^2\lambda^3\Lambda_0(\Lambda_0-M_0)(\Lambda_0-N_0)+\lambda^2\mu^3M_0(M_0-N_0)(M_0-\Lambda_0) \\ \quad=\lambda^2\mu^2(\Lambda_0-M_0)\left[\lambda\Lambda_0(\Lambda_0-N_0)-\mu M_0(M_0-N_0)\right] \\ \quad=\lambda^2\mu^2(\Lambda_0-M_0)\left[\lambda\Lambda_0^2-\mu M_0^2-N_0(\lambda\Lambda_0-\mu M_0)\right]. \end{cases}$$

B. Reste donc l'intégrale générale qui seule pourra fournir l'expression demandée de u. Pour cette solution, au contraire, aucune condition ne sera imposée à l'avance aux valeurs des

---

En effet, considérons en particulier la dernière des équations (5), qui sera, étant écrite à l'aide des symboles différentiels déjà employés un peu plus haut,

$$\frac{d\Omega}{d\nu}=\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\frac{d\Lambda}{d\nu}+\frac{\partial\Omega}{\partial M}\frac{dM}{d\nu}+\frac{\partial\Omega}{\partial N}\frac{dN}{d\nu}=0,$$

et pourra, par conséquent, étant multipliée par $2\Theta f(\nu)$, et en ayant égard à la définition (3) de Θ, être présentée sous la forme

$$f(\nu)\left[2\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+(\mu-\nu)(\lambda-\mu)\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}.2(\nu-\lambda)\frac{d\Lambda}{d\nu}+(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\frac{\partial\Omega}{\partial M}.2(\mu-\nu)\frac{dM}{d\nu}\right]$$
$$+\frac{\partial\Omega}{\partial N}.2\Theta f(\nu)\frac{dN}{d\nu}=0.$$

En ayant alors égard aux deux groupes (γ) et (6), la même équation deviendra

$$f(\nu)\left[2\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+(\mu-\nu)(\lambda-\mu)\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}.(\Lambda-N)+(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\frac{\partial\Omega}{\partial M}.(N-M)\right]$$
$$+\frac{\partial\Omega}{\partial N}\left[\{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-2\nu)f(\nu)-\Theta f'(\nu)\}N+(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda-(\nu-\lambda)^2f(\mu)M\right]=0,$$

et pourra dès lors être écrite, sous forme abrégée, ainsi qu'il suit :

$$(6)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial N}\left[(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda-(\nu-\lambda)^2f(\mu)M\right]+Hf(\nu)+Kf'(\nu)=0,$$

H et K étant, comme on voit, des expressions entières par rapport à toutes les quantités, variables ou constantes, qui y entreront.

Cela posé, introduisons à présent dans toutes nos équations en même temps l'hypothèse spécifiée tout à l'heure. Cette dernière (6) deviendra tout d'abord, eu égard aux valeurs (5),

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right)_0\mu^2\lambda^3\Lambda_0-\lambda^2\mu^3M_0=0.$$

Or, λ, μ, ν, Λ, M, N étant par définition des variables indépendantes, relativement à la différentiation en N l'expression (7) de Ω donnera

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial N}\right)_0=\frac{\partial\Omega_0}{\partial N_0}=-\lambda^2\mu^2(\Lambda_0-M_0)(\lambda\Lambda_0-\mu M_0),$$

et par suite, en reportant cette valeur, l'équation précédente deviendra

$$-\lambda^2\mu^2(\Lambda_0-M_0)(\lambda\Lambda_0-\mu M_0)\lambda^2\mu^2(\lambda\Lambda_0-\mu M_0)=0.$$

fonctions U et V, en sus des équations (23) ou (24) qui les déterminent, ainsi qu'il en était tout à l'heure pour l'intégrale semi-singulière, mais dans ce cas, la fonction inconnue W n'étant plus

---

Semblablement, l'équation (α) se réduira alors à la suivante

$$\mu\lambda^3\Lambda_0^2 - \lambda\mu^3 M_0^2 = -\frac{\Theta_0}{4d^2},$$

c'est-à-dire, eu égard à la valeur (ε) de Θ_0,

$$\lambda\mu(\lambda^2\Lambda_0^2 - \mu^2 M_0^2) = \frac{1}{4d^2}\lambda\mu(\lambda-\mu).$$

En simplifiant donc ces deux équations, et joignant aux deux dernières (γ) prises pour la même hypothèse, on voit ainsi que les deux quantités Λ_0 et M_0 devront satisfaire en particulier aux quatre équations :

$$(\zeta) \qquad (\Lambda_0 - M_0)(\lambda\Lambda_0 - \mu M_0)^2 = 0, \qquad \lambda^2\Lambda_0^2 - \mu^2 M_0^2 = \frac{1}{4d^2}(\lambda-\mu),$$

$$(\iota) \qquad 2(\lambda-\mu)\frac{dM_0}{d\lambda} = 2(\lambda-\mu)\frac{d\Lambda_0}{d\mu} = M_0 - \Lambda_0.$$

Or, la première ne peut être vérifiée qu'en faisant : soit

A) $\qquad \Lambda_0 - M_0 = 0, \qquad$ ou $\qquad \Lambda_0 = M_0,$

auquel cas la seconde, se réduisant à

$$(\lambda^2-\mu^2)\Lambda_0^2 - \frac{1}{4d^2}(\lambda-\mu) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\lambda-\mu)\left[(\lambda+\mu)\Lambda_0^2 - \frac{1}{4d^2}\right] = 0,$$

exigerait elle-même, pour être satisfaite, que l'on ait ou bien

a) $\qquad \lambda - \mu = 0,$

ou bien

b) $\qquad (\lambda+\mu)\Lambda_0^2 - \frac{1}{4d^2} = 0, \qquad$ ou $\qquad \Lambda_0 = M_0 = \pm\frac{1}{2d}\frac{1}{\sqrt{\lambda+\mu}},$

lesquelles hypothèses, étant introduites dans les deux équations (ι), les réduirait elles-mêmes à

$$2(\lambda-\mu)\cdot\frac{\pm 1}{4d}(\lambda+\mu)^{-\frac{3}{2}} = 0;$$

soit

B) $\qquad \lambda\Lambda_0 - \mu M_0 = 0, \qquad$ ou $\qquad \lambda\Lambda_0 = \mu M_0$

ce qui réduirait de nouveau la seconde équation (ζ) à $\lambda - \mu = 0$.

Les quatre équations (ζ) et (ι) ne pouvant ainsi être vérifiées simultanément qu'en

fournie immédiatement elle-même, mais seulement ses deux dérivées en U et V par les deux équations (12), l'on aperçoit de suite que pour pouvoir arriver par ce moyen à l'expression de la fonction W elle-même, il faudra que deux conditions se trouvent successivement remplies, savoir :

1° Que lorsque l'on aura, dans ces équations (12), effectué les quadratures en traitant U et V comme des constantes, les premiers membres de ces équations, qui seront alors des fonctions de λ, μ, ν, U, et V, soient tels que l'on puisse éliminer les trois variables λ, μ, ν, séparément entre chacune d'elles et les deux équations antérieurement acquises (25), auquel cas ces deux premiers membres se transformeront l'un et l'autre, par cette élimination, en une fonction des deux seules variables U et V, à l'exclusion de λ, μ, ν.

2° Que les deux fonctions de U et V ainsi obtenues réalisent alors la condition d'intégrabilité, auquel cas, en vertu des deux équations considérées (12), elles représenteront, à un même facteur constant près, les deux dérivées partielles en U et V de la fonction inconnue W, et dès lors l'expression cherchée de cette fonction W s'ensuivra à l'aide d'une simple quadrature.

La légitimité, et par conséquent le succès de la méthode, reposant tout entière sur ces deux conditions, il est donc esssentiel, avant d'en entreprendre les calculs, de nous assurer à l'avance qu'elles seront bien toutes deux effectivement remplies.

A cet effet, convenant de désigner respectivement par W_2 et W_1 les premiers membres des équations en question (12), c'est-

---

établissant entre les variables indépendantes λ et μ seules des relations inadmissibles, on est assuré par là que les deux équations finales, résultant de l'élimination dont il est question ci-dessus, ne sont pas identiques dans l'hypothèse particulière où nous nous sommes placés; et, par conséquent, elles ne le sont pas non plus en laissant les variables λ, μ, ν et les constantes a^2, b^2, c^2 complètement indéterminées, ce qui est précisément le résultat sur lequel se fonde notre conclusion relative à l'impossibilité d'une solution du problème fournie par l'intégrale semi singulière de l'équation aux dérivées partielles (4).

à-dire posant, en vue de faciliter les écritures,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} W_1 &= \int\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}} + \int\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)}} + \int\frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}},\\ W_2 &= \int\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}} + \int\frac{\mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)}} + \int\frac{\nu d\nu}{\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}},\end{aligned}\right.$$

nous pourrons dès lors comprendre à la fois ces deux expressions, pour les valeurs 1 et 2 de l'indice i, dans la formule synthétique, où ρ désigne l'une quelconque des trois coordonnées λ, μ, ν,

$$(33)\qquad W_i = \sum_\rho \int \frac{\rho^{i-1} d\rho}{\sqrt{f(\rho)(\rho^2+U\rho+V)}},$$

et la démonstration des conditions sus-indiquées s'établira sans difficulté, indépendamment l'une de l'autre, de la façon suivante.

1° Les deux expressions (32) ou (33) devenant des fonctions déterminées des seules variables λ, μ, ν, lorsque l'on y aura remis, après les quadratures effectuées, à la place de U et V leurs valeurs (25), nous continuerons, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici, à dénoter par la caractéristique d leurs dérivées partielles prises dans cette hypothèse, et nous dénoterons au contraire par la caractéristique ∂ les dérivées prises par rapport aux cinq variables λ, μ, ν, U, et V, considérées simultanément comme indépendantes. Avec ces définitions, la différentiation de l'expression (33) donnera, par rapport à l'une quelconque des trois variables ρ,

$$(34)\qquad \frac{dW_i}{d\rho} = \frac{\partial W_i}{\partial U}\frac{dU}{d\rho} + \frac{\partial W_i}{\partial V}\frac{dV}{d\rho} + \frac{\partial W_i}{\partial \rho},$$

en sorte que l'on aura tout d'abord

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{D(U, V, W_i)}{D(\lambda, \mu, \nu)} &= \begin{vmatrix}
\frac{dU}{d\lambda}, & \frac{dV}{d\lambda}, & \frac{dW_i}{d\lambda} \\
\frac{dU}{d\mu}, & \frac{dV}{d\mu}, & \frac{dW_i}{d\mu} \\
\frac{dU}{d\nu}, & \frac{dV}{d\nu}, & \frac{dW_i}{d\nu}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{dU}{d\lambda}, & \frac{dV}{d\lambda}, & \frac{\partial W_i}{\partial U}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{\partial W_i}{\partial V}\frac{dV}{d\lambda} + \frac{\partial W_i}{\partial \lambda} \\
\frac{dU}{d\mu}, & \frac{dV}{d\mu}, & \frac{\partial W_i}{\partial U}\frac{dU}{d\mu} + \frac{\partial W_i}{\partial V}\frac{dV}{d\mu} + \frac{\partial W_i}{\partial \mu} \\
\frac{dU}{d\nu}, & \frac{dV}{d\nu}, & \frac{\partial W_i}{\partial U}\frac{dU}{d\nu} + \frac{\partial W_i}{\partial V}\frac{dV}{d\nu} + \frac{\partial W_i}{\partial \nu}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\frac{dU}{d\lambda}, & \frac{dV}{d\lambda}, & \frac{\partial W_i}{\partial \lambda} \\
\frac{dU}{d\mu}, & \frac{dV}{d\mu}, & \frac{\partial W_i}{\partial \mu} \\
\frac{dU}{d\nu}, & \frac{dV}{d\nu}, & \frac{\partial W_i}{\partial \nu}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{D(U, V)}{D(\mu, \nu)}\frac{\partial W_i}{\partial \lambda} + \frac{D(U, V)}{D(\nu, \lambda)}\frac{\partial W_i}{\partial \mu} + \frac{D(U, V)}{D(\lambda, \mu)}\frac{\partial W_i}{\partial \nu}.
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, si, pour continuer l'analogie des notations, nous convenons encore de représenter par R la dérivée de u par rapport à ρ, en sorte que les trois égalités (13) et (17) soient de même comprises sous les formules synthétiques

$$(36)\qquad R = \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{\rho^2 + U\rho + V}{f(\rho)}},$$

le résultat de la différentiation en ∂ de l'expression (33) pouvant alors être écrit, à l'aide de ce système de notation,

$$(37)\qquad \frac{\partial W_i}{\partial \rho} = \frac{\rho^{i-1}}{\sqrt{f(\rho)}(\rho^2 + U\rho + V)} = \frac{1}{2d}\frac{\rho^{i-1}}{f(\rho)R},$$

nous trouverons sans peine, en substituant cette expression prise successivement pour $\rho = \lambda, \mu, \nu$ dans le dernier membre des équations précédentes (35), puis ayant égard aux valeurs (31) déjà calculées tout à l'heure à l'aide des équations (23) seulement, c'est-à-dire sans faire intervenir aucune considération spéciale à l'hypothèse en vue de laquelle nous les avons obtenues,

$$\frac{D(U, V, W_i)}{D(\lambda, \mu, \nu)} = \frac{1}{2d}\left[\frac{D(U, V)}{D(\mu, \nu)}\frac{\lambda^{i-1}}{f(\lambda)\Lambda} + \frac{D(U, V)}{D(\nu, \lambda)}\frac{\mu^{i-1}}{f(\mu)M} + \frac{D(U, V)}{D(\lambda, \mu)}\frac{\nu^{i-1}}{f(\nu)N}\right]$$

$$= -\frac{2^5 d^3}{\Theta^2}\left[(\mu - \nu)\lambda^{i-1} + (\nu - \lambda)\mu^{i-1} + (\lambda - \mu)\nu^{i-1}\right]\Omega,$$

d'où nous déduirons séparément, pour $i = 1$, et $i = 2$, Ω étant l'expression entière (30), les deux égalités

$$\frac{D(U, V, W_1)}{D(\lambda, \mu, \nu)} = 0, \qquad \frac{D(U, V, W_2)}{D(\lambda, \mu, \nu)} = 0.$$

qui montrent que l'on a, pour les valeurs de U et de V qui satisferont aux équations (23), c'est-à-dire pour les expressions (25),

(38) $$W_1 = \mathcal{F}_1(U, V), \qquad W_2 = \mathcal{F}_2(U, V).$$

Nos deux expressions W_1 et W_2, ou les premiers membres de nos deux équations (12), sont donc bien, comme il le fallait, deux fonctions des deux seules variables U et V, à l'exclusion de λ, μ, ν, et la première des deux conditions nécessaires se trouve ainsi déjà remplie.

2° Quand bien même nous n'eussions pas établi le premier résultat que nous venons de démontrer à l'instant, chacune des fonctions W_i, qui s'offrent d'après leur définition (33) sous l'aspect d'une fonction de λ, μ, ν, U, et V, pourra, en tout état de cause, être réduite, par le moyen des équations (25), à la forme d'une fonction de trois variables seulement, telle que

(39) $$W_i = \mathcal{F}(U, V, \lambda),$$

en y remplaçant simplement, après les quadratures effectuées, les deux variables μ et ν par leurs valeurs en fonction de U, V, et λ, que l'on tirerait de ces équations (25), soit

$$(40) \qquad \mu = f_1(U, V, \lambda), \qquad \nu = f_2(U, V, \lambda).$$

Cela posé, si par analogie avec ce que nous avons fait dans le numéro précédent, nous réservons de même la caractéristique d pour dénoter les différentiations effectuées dans cette dernière hypothèse, c'est-à-dire par rapport aux seules variables indépendantes U, V, et λ, et que nous indiquions encore à l'aide de la caractéristique ∂ les dérivées prises par rapport aux cinq variables λ, μ, ν, U, et V, considérées simultanément comme indépendantes, il est clair que nous aurions eu encore, par rapport aux deux variables U et V en particulier, les formules, analogues à celle (34) envisagée tout à l'heure,

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dW_i}{dU} &= \frac{\partial W_i}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dU} + \frac{\partial W_i}{\partial \nu}\frac{d\nu}{dU} + \frac{\partial W_i}{\partial U}, \\ \frac{dW_i}{dV} &= \frac{\partial W_i}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dV} + \frac{\partial W_i}{\partial \nu}\frac{d\nu}{dV} + \frac{\partial W_i}{\partial V}, \end{aligned} \right.$$

les dérivées en ∂ qui y figurent étant, d'après les formules (37) et (33) du numéro précédent,

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial W_i}{\partial \mu} = \frac{1}{2d}\frac{\mu^{i-1}}{f(\mu)\,M}, \qquad \frac{\partial W_i}{\partial \nu} = \frac{1}{2d}\frac{\nu^{i-1}}{f(\nu)\,N}, \\ &\frac{\partial W_i}{\partial U} = -\frac{1}{2}\sum_\rho \int (\rho^2+U\rho+V)^{-}\frac{\rho^{i} d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}, \qquad \frac{\partial W_i}{\partial V} = -\frac{1}{2}\sum_\rho \int (\rho^2+U\rho+V)^{-\frac{3}{2}}\frac{\rho^{i-1} d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}. \end{aligned} \right.$$

En donnant à l'indice i, la valeur 1 dans la première des formules (41), et la valeur 2 dans la seconde, on aurait donc eu

$$(43) \quad \frac{dW_1}{dU} - \frac{dW_2}{dV} = \frac{\partial W_1}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dU} - \frac{\partial W_2}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dV} + \frac{\partial W_1}{\partial \nu}\frac{d\nu}{dU} - \frac{\partial W_2}{\partial \nu}\frac{d\nu}{dV} + \frac{\partial W_1}{\partial U} - \frac{\partial W_2}{\partial V}.$$

Or, les formules suivantes (42) donnant

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W_1}{\partial\mu}=\frac{1}{2d}\,\frac{1}{f(\mu)\,M}, &&\frac{\partial W_1}{\partial\nu}=\frac{1}{2d}\,\frac{1}{f(\nu)\,N},\\ &\frac{\partial W_2}{\partial\mu}=\frac{1}{2d}\,\frac{\mu}{f(\mu)\,M}, &&\frac{\partial W_2}{\partial\nu}=\frac{1}{2d}\,\frac{\nu}{f(\nu)\,N},\\ &\frac{\partial W_1}{\partial U}=-\frac{1}{2}\sum_\rho\int(\rho^2+U\rho+V)^{-\frac{3}{2}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}=\frac{\partial W_2}{\partial V}, \end{aligned}\right.$$

l'égalité précédente (43) se réduit simplement à

$$\text{(44)}\qquad \frac{dW_1}{dU}-\frac{dW_2}{dV}=\frac{1}{2d}\left[\frac{1}{f(\mu)M}\left(\frac{d\mu}{dU}-\mu\frac{d\mu}{dV}\right)+\frac{1}{f(\nu)N}\left(\frac{d\nu}{dU}-\nu\frac{d\nu}{dV}\right)\right].$$

Les dérivées en d de μ et de ν qui figurent au second membre de cette égalité, ainsi que des précédentes, sont celles qui résulteraient immédiatement de la différentiation des expressions (40) dont les variables indépendantes sont U, V, et λ. Mais il est bien clair qu'il n'est pas nécessaire, pour pouvoir les calculer, de posséder préalablement lesdites expressions (40) elles-mêmes, ou, en d'autres termes, d'avoir résolu par rapport à μ et ν les équations (25). En prenant, effectivement, dans ces dernières équations U, V, et λ pour variables indépendantes, et les différentiant successivement par rapport aux deux premières de ces variables, on forme les quatre équations

$$\left\{\begin{aligned} &1=\frac{dF_1}{d\mu}\frac{d\mu}{dU}+\frac{dF_1}{d\nu}\frac{d\nu}{dU}, &&0=\frac{dF_2}{d\mu}\frac{d\mu}{dU}+\frac{dF_2}{d\nu}\frac{d\nu}{dU},\\ &0=\frac{dF_1}{d\mu}\frac{d\mu}{dV}+\frac{dF_1}{d\nu}\frac{d\nu}{dV}, &&1=\frac{dF_2}{d\mu}\frac{d\mu}{dV}+\frac{dF_2}{d\nu}\frac{d\nu}{dV}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en intervertissant les lignes et les colonnes, renversant les deux membres de chaque équation, et remplaçant, dans les symboles des dérivées, les fonctions F_1 et F_2,

par les quantités égales U et V, les suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dU}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dU}+\dfrac{dU}{d\nu}\dfrac{d\nu}{dU}=1, & \dfrac{dU}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dV}+\dfrac{dU}{d\nu}\dfrac{d\nu}{dV}=0, \\ \dfrac{dV}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dU}+\dfrac{dV}{d\nu}\dfrac{d\nu}{dU}=0, & \dfrac{dV}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dV}+\dfrac{dV}{d\nu}\dfrac{d\nu}{dV}=1, \end{array}\right.$$

et qui se décomposant dès lors, par colonnes, en deux systèmes linéaires, dont les inconnues et les seconds membres seuls diffèrent, fourniront pour ces inconnues les quatre valeurs

$$\frac{d\mu}{dU}=\frac{\dfrac{dV}{d\nu}}{\Delta},\qquad \frac{d\nu}{dU}=\frac{-\dfrac{dV}{d\mu}}{\Delta},\qquad \frac{d\mu}{dV}=\frac{-\dfrac{dU}{d\nu}}{\Delta},\qquad \frac{d\nu}{dV}=\frac{\dfrac{dU}{d\mu}}{\Delta},$$

le dénominateur commun Δ étant précisément le premier des déterminants fonctionnels déjà calculés (31), savoir :

$$(45)\qquad \Delta=\frac{dU}{d\mu}\cdot\frac{dV}{d\nu}-\frac{dU}{d\nu}\,\frac{dV}{d\mu}=-\left(\frac{4d^2}{\Theta}\right)^2(\mu-\nu)f(\lambda)\,\Lambda\,.\,\Omega$$

De ces valeurs ainsi calculées l'on déduira, en revenant maintenant aux équations (23) qui ont servi à déterminer U et V, celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mu}{dU}-\mu\frac{d\mu}{dV}&=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{d\nu}+\mu\frac{dU}{d\nu}\right)\\ &=\frac{1}{\Delta}\Big[-(\lambda\mathcal{B}+\mu\mathcal{D})+\mu(\mathcal{B}+\mathcal{D})\Big]=-\frac{1}{\Delta}(\lambda-\mu)\,\mathcal{B},\\ \frac{d\nu}{dU}-\nu\frac{d\nu}{dV}&=-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dV}{d\mu}+\nu\frac{dU}{d\mu}\right)\\ &=-\frac{1}{\Delta}\Big[-(\nu\mathcal{A}+\lambda\mathcal{F})+\nu(\mathcal{A}+\mathcal{F})\Big]=-\frac{1}{\Delta}(\nu-\lambda)\,\mathcal{F}; \end{aligned}\right.$$

et, par suite, en reportant ces valeurs dans l'égalité ci-dessus (44), puis ayant égard aux définitions (22) de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, ainsi qu'à la

valeur (45) de Δ, on trouvera définitivement

$$\frac{dW_1}{dU}-\frac{dW_2}{dV}=-\frac{1}{2d.\Delta}\left[\frac{(\lambda-\mu)\mathfrak{H}}{f(\mu)M}+\frac{(\nu-\lambda)\mathcal{F}}{f(\nu)N}\right]$$

$$=\frac{-1}{2d.\Delta}\left[\frac{\lambda-\mu}{f(\mu)M}\cdot\frac{4d^2}{\Theta}(\nu-\lambda)f(\mu)M(M-N)+\frac{\nu-\lambda}{f(\nu)N}\cdot\frac{4d^2}{\Theta}(\lambda-\mu)f(\nu)N(N-M)\right]$$

$$=\frac{1}{2d}\left(\frac{\Theta}{4d^2}\right)^2\frac{(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}{(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda.\Omega}\frac{4d^2}{\Theta}\left[(M-N)+(N-M)\right]=0,$$

du moment que nous avons reconnu, à propos de l'hypothèse relative à l'intégrale semi-singulière, que la quantité Ω ne pouvait être supposée nulle.

Ce résultat montre que, sans qu'il soit besoin d'avoir égard au précédent établi sous le numéro 1°, c'est-à-dire en n'imposant à l'avance aucune restriction à la forme de la fonction $\mathcal{F}$ (39), les deux fonctions W_2 et W_1 rempliront toujours la condition d'intégrabilité relativement aux deux variables U et V, la variable λ étant traitée comme une constante, circonstance qui subsistera dès lors évidemment dans l'hypothèse particulière où l'on restreindrait cette forme à celle des fonctions (38), qui leur appartient en réalité, d'après ce que nous avons reconnu tout à l'heure sous le numéro précédent.

Il existera donc ainsi, nous en sommes assurés dès maintenant avant d'en faire le calcul, une certaine fonction $\mathcal{F}(U, V)$, telle que l'on ait

$$(46)\qquad W_1=\frac{d\mathcal{F}}{dV}\qquad \text{et}\qquad W_2=\frac{d\mathcal{F}}{dU},$$

et que l'on déterminera en conséquence par la quadrature de la différentielle

$$(47)\qquad d\mathcal{F}=W_2dU+W_1dV,$$

W_1 et W_2 étant les fonctions (32) transformées comme nous l'avons expliqué; et cela fait, les équations (12), dont les premiers membres sont par définition précisément W_2 et W_1, devenant

$$\frac{d\mathcal{F}}{dU}=-4d.\frac{dW}{dU},\qquad \frac{d\mathcal{F}}{dV}=-4d.\frac{dW}{dV},$$

donneront immédiatement

$$(48)\qquad d\mathcal{F} = -4d.dW, \qquad \text{ou} \qquad W = -\frac{1}{4d}\mathcal{F}(U, V) + \text{const.}.$$

En reportant donc alors cette valeur dans l'intégrale complète (8), la solution cherchée se présentera définitivement sous la forme

$$(49)\left\{\begin{aligned} u = u_0 + \frac{1}{2d}\Bigg[&\int\sqrt{\frac{\lambda^2 + U\lambda + V}{f(\lambda)}}\,d\lambda + \int\sqrt{\frac{\mu^2 + U\mu + V}{f(\mu)}}\,d\mu \\ &+ \int\sqrt{\frac{\nu^2 + U\nu + V}{f(\nu)}}\,d\nu - \frac{1}{2}\mathcal{F}(U, V)\Bigg], \end{aligned}\right.$$

les quantités U et V étant les expressions (25), et la fonction $\mathcal{F}$ celle fournie par la quadrature de la différentielle (47).

Le Lecteur trouvera à la fin de la Note suivante un exemple d'application littérale de la méthode qui vient d'être exposée pour l'intégration du système formé par les six équations (4) et (5).

L'analyse un peu longue que nous venons de développer offre cet avantage de nous amener en toute certitude à ces deux conclusions importantes :

a) Qu'il existe une solution commune à l'équation (4) et aux trois équations de Lamé ou, ce qui est la même chose, aux sept équations (14) et (15) dans lesquelles Λ, M, N sont, par hypothèse, les dérivées de la fonction inconnue u;

b) Que l'expression la plus générale de cette solution ne pourra renfermer qu'une simple constante additive, et non aucune fonction ou autre constante arbitraire nouvelle, en sus des deux constantes introduites par l'expression des inconnues auxiliaires U et V : fait capital qu'aucune considération *a priori* ne permettait de prévoir en abordant le problème par cette voie, nous voulons dire par l'intégration la plus générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (4).

Mais, une fois en possession de ce résultat et les expressions de ces inconnues U et V étant supposées obtenues, nous pour-

rons à présent, pour le calcul effectif de cette solution commune u dont l'existence est désormais établie, substituer, à la voie assez longue et compliquée sur laquelle nous avons basé nos raisonnements, un procédé beaucoup plus rapide, qui devra nous conduire en fin de compte évidemment au même résultat, mais dont la légitimité n'eût été nullement évidente, si nous l'eussions employé de prime abord, en l'absence des considérations qui précèdent.

En effet, si nous rappelons une fois de plus cette propriété caractéristique, découverte par Lagrange, de la solution complète d'une équation aux dérivées partielles telle que (4), consistant en ce que les expressions des dérivées de la fonction inconnue empruntées à l'intégrale générale se confondent avec les expressions correspondantes relatives à l'intégrale complète, à la seule condition de remplacer dans ces dernières les constantes d'intégration par certaines fonctions des variables indépendantes, à savoir celles déterminées par les deux équations analogues à (11) ou (12), on voit que dans le cas actuel les trois fonctions inconnues U, V, W étant déterminées simultanément par l'ensemble des équations (24), et (46) et (48), ou (12), et par suite les expressions (25) de U et V vérifiant, conjointement avec l'expression correspondante (48) de W, en particulier ces deux équations (12) ou (46), l'on doit considérer en conséquence ces mêmes expressions de U et V comme étant précisément celles envisagées par Lagrange dans la propriété relative à l'intégrale complète que nous venons de rappeler : d'où il suit, que nous sommes assurés d'ores et déjà par les résultats de l'analyse qui précède :

1° Que les expressions (17) seront bien celles des dérivées de l'inconnue u correspondant à la solution la plus générale de la question, à la seule condition d'y remettre à la place de U et V les valeurs (25);

2° Que ces mêmes expressions (17), ainsi transformées, satisferont bien alors à la condition d'intégrabilité, du moment que nous sommes assurés par cette même analyse de l'existence de cette solution u;

3° Que l'on obtiendra, par conséquent, ladite solution cher-

chée par la seule quadrature de la différentielle

$$du = \Lambda d\lambda + \mathrm{M} d\mu + \mathrm{N} d\nu, \tag{50}$$

Λ, M, N désignant par hypothèse ces mêmes expressions (17) calculées de la façon que nous venons de dire, laquelle intégration n'introduira bien, effectivement, qu'une seule constante, simplement additive, pour chaque coordonnée rectiligne, en sus de celles déjà introduites par les expressions (25) des inconnues U et V, ainsi que l'indiquait la formule (49), obtenue comme résultat de notre théorie ci-dessus.

Supposons donc ces deux opérations successivement effectuées, et les valeurs respectives de la fonction inconnue u et de ses dérivées Λ, M, N, obtenues de la façon que nous venons de dire. Ces expressions toutefois ne constitueront pas encore la solution définitive de la question, et une troisième et dernière opération reste encore pour cela à accomplir.

En effet, le problème posé primitivement consistant à déterminer trois fonctions x, y, z, des coordonnées λ, μ, ν, satisfaisant simultanément aux six équations figurées par les types (1) et (2) ou (4) et (5), nous avons substitué, dans l'analyse qui précède, aux équations du second type, les trois équations du second ordre de Lamé, qui en sont des conséquences différentielles, ainsi que nous le montrons au début de notre Chapitre V (pp. 347-351). La solution que nous supposions obtenue tout à l'heure est donc de nouveau plus large que celle qui convient proprement à la question, et il faut encore une fois restreindre cette solution par la condition de satisfaire au système proposé lui-même, c'est-à-dire, par conséquent, aux trois seules équations du second type (5), puisque, par la façon même dont on la suppose obtenue, cette solution satisfait déjà aux trois autres équations du système, à savoir celles du premier type (4).

Si, pour exprimer cette condition, nous convenons encore, comme dans notre Chapitre V, de distinguer par l'accentuation les valeurs des mêmes fonctions, correspondant successivement aux trois coordonnées x, y, z, les expressions (25) de U et V fourniront ainsi trois couples distincts analogues, dans lesquels

les constantes d'intégration C_1 et C_2 seront seules différentes, savoir

$$(51)\quad \begin{cases} U' = F_1(\lambda, \mu, \nu, C_1', C_2'), & V' = F_2(\lambda, \mu, \nu, C_1', C_2'), \\ U'' = F_1(\lambda, \mu, \nu, C_1'', C_2''), & V'' = F_2(\lambda, \mu, \nu, C_1'', C_2''), \\ U''' = F_1(\lambda, \mu, \nu, C_1''', C_2'''), & V''' = F_2(\lambda, \mu, \nu, C_1''', C_2'''), \end{cases}$$

lesquels étant remis à la place de U et V dans les expressions (17) des dérivées Λ, M, N, donneront semblablement les trois couples de valeurs

$$(52)\quad \begin{cases} \Lambda' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\lambda^2 + U'\lambda + V'}{f(\lambda)}}, & M' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\mu^2 + U'\mu + V'}{f(\mu)}}, & N' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\nu^2 + U'\nu + V'}{f(\nu)}}, \\ \Lambda'' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\lambda^2 + U''\lambda + V''}{f(\lambda)}}, & M'' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\mu^2 + U''\mu + V''}{f(\mu)}}, & N'' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\nu^2 + U''\nu + V''}{f(\nu)}}, \\ \Lambda''' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\lambda^2 + U'''\lambda + V'''}{f(\lambda)}}, & M''' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\mu^2 + U'''\mu + V'''}{f(\mu)}}, & N''' = \dfrac{1}{2d}\sqrt{\dfrac{\nu^2 + U'''\nu + V'''}{f(\nu)}}. \end{cases}$$

Ces préliminaires étant acquis, il faudra donc, d'après ce que nous venons de dire, que ces dernières valeurs étant reportées elles-mêmes à la place des dérivées $\frac{du}{d\varphi}, \frac{dv}{d\rho}$, dans les trois équations du second type (5), les vérifient, quelles que soient les variables λ, μ, ν, ou, en d'autres termes, il faudra que les trois relations

$$(53)\quad \begin{cases} (\mu-\nu) f(\lambda)\Lambda''\Lambda''' + (\nu-\lambda) f(\mu) M''M''' + (\lambda-\mu) f(\nu) N''N''' = 0, \\ (\mu-\nu) f(\lambda)\Lambda'''\Lambda' + (\nu-\lambda) f(\mu) M'''M' + (\lambda-\mu) f(\nu) N'''N' = 0, \\ (\mu-\nu) f(\lambda)\Lambda'\Lambda'' + (\nu-\lambda) f(\mu) M'M'' + (\lambda-\mu) f(\nu) N'N'' = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les Λ, M, N sont, par hypothèse, les valeurs précédentes (52), soient satisfaites identiquement à l'aide de simples relations entre les constantes qui y figurent, savoir les quatre constantes données a^2, b^2, c^2, d^2, d'une part, et, d'autre part, les six constantes d'intégration C, introduites par les expressions (51).

En résumé, en suivant la méthode que nous venons d'exposer, deux conditions, comme dans celle développée au Chapitre V, seront encore nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une solu-

tion du problème : 1° que le système des deux équations différentielles totales (24) soit complètement intégrable; et 2° que les trois équations (53) puissent être vérifiées identiquement, en disposant convenablement des six constantes C introduites par l'intégration de ce système pour les trois coordonnées rectilignes, la condition d'intégrabilité de la différentielle (50) étant encore forcément remplie, comme nous l'avons observé, dès que la première de ces deux conditions se trouve réalisée elle-même.

En supposant ces deux conditions remplies, l'application de la présente méthode, dont nous comptons faire usage encore pour un autre Cas dans la Note suivante, consistera dès lors en fait, d'après les justifications qui précèdent, dans les quatre opérations successives que voici :

1° Former, par le procédé de Jacobi ci-dessus rappelé, en y introduisant, par addition et soustraction, deux indéterminées U et V, une solution complète de l'équation aux dérivées partielles (1) ou (4), représentant, pour le Cas général, les trois équations de gauche du groupe (5) ou (20) du Chapitre III;

2° Déterminer ces deux quantités U et V à l'aide du système d'équations différentielles totales, qui se déduit presque immédiatement, ainsi que nous l'avons montré, des trois équations de Lamé (97) du Chapitre V [pour le Cas général, le système ci-dessus (24)];

3° Déterminer ensuite l'expression générale de u par la simple quadrature de la différentielle (50), qui est alors nécessairement une différentielle exacte;

4° Calculer enfin les relations entre les six constantes d'intégration auxquelles devront se réduire, à l'aide des résultats déjà acquis, les trois équations (2) ou (5), représentant les trois équations de droite du système proposé (5) ou (20) du Chapitre III.

Ayant ainsi exposé et justifié complètement et rigoureusement (*), croyons-nous, la méthode que nous proposons à nou-

(*) Cette méthode étant ainsi formulée, quant à la pratique, dans les quatre opérations que nous venons de dire, il apparaîtra peut-être au Lecteur que nous eussions pu dès lors faire l'économie de la plus grande partie de ce premier paragraphe, et notamment de toutes les considérations fondées sur la théorie de l'intégration des équations aux dérivées

veau dans cette Note pour le problème spécial qui fait déjà l'objet du Chapitre V, l'on pourra s'en servir de deux façons différentes, suivant que l'on tiendra à rester sur le terrain pure-

---

partielles du premier ordre, en nous bornant simplement, pour tenir lieu de l'opération 1°, à vérifier l'équation (4) ou (14) à l'aide d'expressions de Λ, M, N convenablement choisies, sous la condition de renfermer deux indéterminées U et V (par exemple, pour le Cas général, les expressions (17), qui s'offrent pour ainsi dire d'elles-mêmes à l'esprit), sauf à ne poursuivre ensuite, bien entendu, l'application de la méthode par l'opération 3° que si cette opération était trouvée praticable : ce qui équivaudrait dès lors à ajouter une nouvelle condition nécessaire, distincte des deux autres spécifiées ci-dessus, à savoir l'intégrabilité de la différentielle du (50), pour les expressions de Λ, M, N adoptées comme point de départ avec les valeurs des fonctions U et V déterminées par l'opération précédente 2°.

Mais, pour peu qu'il y réfléchisse quelques instants, le Lecteur reconnaîtra bien vite, que si une telle méthode eût bien été suffisante à la vérité pour procurer une solution (en supposant les diverses conditions successivement énumérées, toutes remplies à la fois) l'on n'eût été assuré en aucune façon, en suivant cette voie, d'avoir bien embrassé la totalité de la solution, attendu qu'il existe une infinité de manières de satisfaire à l'équation proposée (14) avec des valeurs de Λ, M, N renfermant deux indéterminées U et V. Ainsi, par exemple, on y satisferait également, pour le Cas général, à l'aide des expressions

$$\Lambda^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\mu\nu+(\mu+\nu)U+V}{f(\lambda)}, \quad M^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\nu\lambda+(\nu+\lambda)U+V}{f(\mu)}, \quad N^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{\lambda\mu+(\lambda+\mu)U+V}{f(\nu)},$$

qui sont, comme les précédentes, linéaires en U et V, ou bien à l'aide de fonctions du second degré telles que

$$\begin{cases} \Lambda^2 = \dfrac{1}{8d^2}\left[f(\mu)f(\nu)\{\lambda^2+\mu\nu+\lambda U^2+(\mu+\nu)V^2\} + 2\{(\nu-\lambda)f(\mu)-(\lambda-\mu)f(\nu)\}UV\right], \\ M^2 = \dfrac{1}{8d^2}\left[f(\nu)f(\lambda)\{\mu^2+\nu\lambda+\mu U^2+(\nu+\lambda)V^2\} + 2\{(\lambda-\mu)f(\nu)-(\mu-\nu)f(\lambda)\}UV\right]. \\ N^2 = \dfrac{1}{8d^2}\left[f(\lambda)f(\mu)\{\nu^2+\lambda\mu+\nu U^2+(\lambda+\mu)V^2\} + 2\{(\mu-\nu)f(\lambda)-(\nu-\lambda)f(\mu)\}UV\right], \end{cases}$$

ou encore, soit avec les expressions que nous venons d'indiquer, soit même avec la forme d'expressions primitivement considérées (18), en prenant pour U et V dans lesdites expressions des fonctions indéterminées de λ, μ, ν, et u, et non plus des seules variables indépendantes λ, μ, ν. Dans chacune de ces différentes hypothèses, la forme du système d'équations différentielles totales auquel on serait conduit de la même façon différerait notablement de celle du système (24) rencontré dans la théorie ci-dessus, et pour la dernière, en outre, en admettant que l'on fût parvenu jusqu'à l'opération 3°, la détermination de la coordonnée u se trouverait alors dépendre de l'intégration d'une équation différentielle totale, et non plus d'une simple quadrature, comme dans la théorie en question.

Mais, en supposant que, dans ces différents cas ou dans d'autres analogues, de semblables expressions procurées par la seule condition indiquée tout à l'heure, pussent

ment analytique, ou que l'on aimera mieux sacrifier l'homogénéité du caractère de la recherche pour y gagner une plus grande rapidité dans l'obtention du résultat final. Nous allons, en terminant, exposer successivement ces deux modes de résoudre la question, fondés l'un et l'autre, comme base nécessaire, sur la théorie que nous venons de développer.

II

Si l'on tient tout d'abord à conserver à la recherche un caractère parfaitement homogène, et par conséquent si l'on s'impose la condition de demeurer sur le terrain exclusivement analytique, ainsi que nous l'avons toujours fait jusqu'ici, il faudra effectuer en réalité de point en point la série des opérations que nous avons indiquées à la fin du paragraphe précédent, sans faire intervenir aucune autre considération de quelque ordre que ce soit.

Il faudra donc tout d'abord procéder à la recherche de l'intégrale générale du système des deux équations différentielles

---

fournir une solution du problème, aucune considération, en dehors de celles développées dans la théorie ci-dessus, ne permettrait de penser que la solution ainsi rencontrée fût effectivement comprise dans celle obtenue en partant des expressions (18) où Λ, M, N sont supposées de simples fonctions de λ, μ, ν; et, par conséquent, l'on devrait croire *a priori* qu'il peut en exister semblablement une infinité d'autres.

La méthode, plus longue et plus pénible, que nous avons développée ci-dessus, fournit, au contraire, pleinement cette assurance, puisqu'elle consiste en somme à partir, non seulement de la solution la plus générale, mais de *toutes* les solutions possibles de ces mêmes équations (1) ou (4), et à disposer ensuite des arbitraires que renferment ces solutions de manière à satisfaire, de la façon la plus générale, à l'autre groupe (2) ou (5).

D'ailleurs, les considérations qui occupent la plus grande partie de ce premier paragraphe, et qui nous ont amenés à la forme de solution (49) pour la coordonnée x, bien que nous ayons renoncé par le fait, presque aussitôt après, à l'obtenir sous cette forme et par ce procédé lui-même, n'ont pas de valeur, seulement à titre de théorie pure, établissant à l'avance l'existence, et garantissant la généralité de la solution fournie beaucoup plus rapidement par la quadrature de la différentielle (50); mais, en tant qu'application pratique et immédiate, elles nous conduiront encore, ainsi qu'on le verra, à une conséquence intéressante que l'on était loin d'attendre, étant donné la nature de la question, et à laquelle nous croyons devoir, à raison de son importance, consacrer en entier la Note V ci-après.

totales (24), c'est-à-dire, en tenant compte des définitions (22) et (3) ainsi que des valeurs (17), du suivant :

(54)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu).dU \\
&= \Bigg[(\lambda-\mu)f(\nu)\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\left(\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}-\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right) \\
&\quad +(\nu-\lambda)f(\mu)\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\left(\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}-\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right)\Bigg]d\lambda \\
&\quad +\Bigg[(\mu-\nu)f(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right) \\
&\quad +(\lambda-\mu)f(\nu)\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\left(\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}-\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right)\Bigg]d\mu \\
&\quad +\Bigg[(\nu-\lambda)f(\mu)\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\left(\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}-\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right) \\
&\quad +(\mu-\nu)f(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right)\Bigg]d\nu, \\
&(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu).dV \\
&= -\Bigg[\mu(\lambda-\mu)f(\nu)\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\left(\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}-\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right) \\
&\quad +\nu(\nu-\lambda)f(\mu)\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\left(\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}-\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right)\Bigg]d\lambda \\
&\quad -\Bigg[\nu(\mu-\nu)f(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right) \\
&\quad +\lambda(\lambda-\mu)f(\nu)\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\left(\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}-\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right)\Bigg]d\mu \\
&\quad -\Bigg[\lambda(\nu-\lambda)f(\mu)\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\left(\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}-\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right) \\
&\quad +\mu(\mu-\nu)f(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right)\Bigg]d\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais, avant de nous occuper de cette intégrale générale, nous allons commencer par mettre ce système sous une autre forme équivalente, qui rendra beaucoup plus faciles les calculs que nous avons l'intention de présenter.

Ce dernier système, en effet, ou, ce qui revient au même, les six équations (23) dont il n'est que la traduction avec l'algorithme des différentielles totales substitué à celui des dérivées partielles, offre ce désavantage que ses différents coefficients, c'est-à-dire en fait les quantités (22), ne sont pas symétriques par rapport aux trois variables λ, μ, ν, ni par suite aux dérivées correspondantes de u, savoir Λ, M, N.

Nous obtiendrons, au contraire, un système équivalent réalisant cette condition indispensable pour la facilité des calculs que nous avons en vue, en opérant de la façon suivante.

Nous souvenant que les six équations en question (23) ne sont autre chose que les deux équations (21) et les deux autres couples qu'on en déduirait par permutation circulaire, résolues par rapport aux six dérivées de U et V, nous écrirons ces deux mêmes équations, en les développant et chassant les dénominateurs, puis faisant pour abréger

$$(55) \qquad H = \frac{1}{4d^2}(\lambda - \mu)\left(\mu \frac{dU}{d\lambda} + \frac{dV}{d\lambda}\right), \qquad K = \frac{-1}{4d^2}(\nu - \lambda)\left(\nu \frac{dU}{d\lambda} + \frac{dV}{d\lambda}\right),$$

et leur adjoignant enfin une simple identité analogue, sous la forme

$$(56) \qquad \begin{cases} 0 = f(\lambda)\,\Lambda^2 - f(\lambda)\,\Lambda\,.\,\Lambda, \\ H = f(\mu)\,M^2 - f(\mu)\,M\,.\,\Lambda, \\ K = f(\nu)\,N^2 - f(\nu)\,N\,.\,\Lambda. \end{cases}$$

Cela fait, nous ajouterons à deux reprises ces trois dernières égalités, multipliées préalablement la première fois par $\mu - \nu$, $\nu - \lambda$, $\lambda - \mu$, et la seconde fois par $\lambda\,(\mu - \nu)$, $\mu\,(\nu - \lambda)$, $\nu\,(\lambda - \mu)$. Nous formerons ainsi les deux autres équations, manifestement équivalentes aux deux précédentes (23) primitivement considérées :

$$(57)\begin{cases}(\nu-\lambda)\mathrm{H}+(\lambda-\mu)\mathrm{K}=(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda^2+(\nu-\lambda)f(\mu)\mathrm{M}^2+(\lambda-\mu)f(\nu)\mathrm{N}^2\\ \qquad -\left[(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda+(\nu-\lambda)f(\mu)\mathrm{M}+(\lambda-\mu)f(\nu)\mathrm{N}\right]\Lambda,\\ \mu(\nu-\lambda)\mathrm{H}+\nu(\lambda-\mu)\mathrm{K}=\lambda(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda^2+\mu(\nu-\lambda)f(\mu)\mathrm{M}^2+\nu(\lambda-\mu)f(\nu)\mathrm{N}^2\\ \qquad -\left[\lambda(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda+\mu(\nu-\lambda)f(\mu)\mathrm{M}+\nu(\lambda-\mu)f(\nu)\mathrm{N}\right]\Lambda.\end{cases}$$

Or, si l'on a égard aux définitions (55) des quantités H et K, les premiers membres de ces deux équations seront, d'une part :

$$(58)\begin{cases}(\nu-\lambda)\mathrm{H}+(\lambda-\mu)\mathrm{K}\\ =\dfrac{1}{4d^2}(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\left[(\mu-\nu)\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda}+\dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda}-\dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right]=\dfrac{\Theta}{4d^2}\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda},\\ \mu(\nu-\lambda)\mathrm{H}+\nu(\lambda-\mu)\mathrm{K}\\ =\dfrac{1}{4d^2}(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\left[(\mu^2-\nu^2)\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda}+(\mu-\nu)\dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right]=\dfrac{\Theta}{4d^2}\left[(\mu+\nu)\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda}+\dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right].\end{cases}$$

D'autre part, pour les seconds membres, ayant déjà la relation (14), nous obtiendrons sans peine une autre égalité semblable, si nous calculons, à l'aide des expressions (18), et en ayant égard aux deux identités très connues, savoir

$$(59)\begin{cases}(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2=-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)=-\Theta,\\ (\mu-\nu)\lambda^3+(\nu-\lambda)\mu^3+(\lambda-\mu)\nu^3=\left[(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2\right](\lambda+\mu+\nu)\\ \qquad =-\Theta(\lambda+\mu+\nu),\end{cases}$$

cette seconde expression, complètement analogue,

$$(60)\begin{cases}\lambda(\mu-\nu)f(\lambda)\Lambda^2+\mu(\nu-\lambda)f(\mu)\mathrm{M}^2+\nu(\lambda-\mu)f(\nu)\mathrm{N}^2\\ =\dfrac{1}{4d^2}\left[\lambda(\mu-\nu)(\lambda^2+\mathrm{U}\lambda+\mathrm{V})+\mu(\nu-\lambda)(\mu^2+\mathrm{U}\mu+\mathrm{V})+\nu(\lambda-\mu)(\nu^2+\mathrm{U}\nu+\mathrm{V})\right]\\ =\dfrac{1}{4d^2}\Big[(\mu-\nu)\lambda^3+(\nu-\lambda)\mu^3+(\lambda-\mu)\nu^3+\{(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2\}\mathrm{U}\\ \qquad +\{(\mu-\nu)\lambda+(\nu-\lambda)\mu+(\lambda-\mu)\nu\}\mathrm{V}\Big]\\ =\dfrac{1}{4d^2}\left[-\Theta(\lambda+\mu+\nu)-\Theta\mathrm{U}\right]=-\dfrac{\Theta}{4d^2}(\lambda+\mu+\nu+\mathrm{U}).\end{cases}$$

Si nous convenons alors de désigner par Ω_1 et Ω_2 les deux expressions symétriques en λ, μ, ν, d'une part, et Λ, M, N, de l'autre,

$$(61)\quad \begin{cases} \Omega_1 = 2d\left[\ \ (\mu-\nu)\,f(\lambda)\,\Lambda + \ \ (\nu-\lambda)\,f(\mu)\,\mathrm{M} + \ \ (\lambda-\mu)\,f(\nu)\,\mathrm{N}\right], \\ \Omega_2 = 2d\left[\lambda\,(\mu-\nu)\,f(\lambda)\,\Lambda + \mu\,(\nu-\lambda)\,f(\mu)\,\mathrm{M} + \nu\,(\lambda-\mu)\,f(\nu)\,\mathrm{N}\right], \end{cases}$$

et que nous introduisions à la fois, dans les deux équations obtenues tout à l'heure (57), à la place des premiers membres les expressions (58), et dans les seconds membres les expressions (14), (60), et (61), elles se transformeront, par ces diverses substitutions dans les deux suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\Theta}{4d^2}\,\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda} = -\dfrac{\Theta}{4d^2} - \dfrac{\Omega_1}{2d}\,\Lambda, \\ \dfrac{\Theta}{4d^2}\left[(\mu+\nu)\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda} + \dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right] = -\dfrac{\Theta}{4d^2}(\lambda+\mu+\nu+\mathrm{U}) - \dfrac{\Omega_2}{2d}\,\Lambda, \end{cases}$$

ou, en multipliant par $\frac{4d^2}{\Theta}$,

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda} = -1 - \dfrac{2d}{\Theta}\,\Omega_1.\Lambda, \\ (\mu+\nu)\,\dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda} + \dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda} = -(\lambda+\mu+\nu+\mathrm{U}) - \dfrac{2d}{\Theta}\,\Omega_2.\Lambda, \end{cases}$$

de sorte qu'en retranchant de la seconde la première multipliée par $\mu+\nu$, nous obtiendrons définitivement les deux premières des six équations suivantes, dans lesquelles auront été transformées les équations (23),

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{d\lambda} = -1 - \dfrac{2d}{\Theta}\,\Omega_1\Lambda, & \dfrac{d\mathrm{V}}{d\lambda} = -(\lambda+\mathrm{U}) + \dfrac{2d}{\Theta}\left[(\mu+\nu)\,\Omega_1 - \Omega_2\right]\Lambda, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mu} = -1 - \dfrac{2d}{\Theta}\,\Omega_1\mathrm{M}, & \dfrac{d\mathrm{V}}{d\mu} = -(\mu+\mathrm{U}) + \dfrac{2d}{\Theta}\left[(\nu+\lambda)\,\Omega_1 - \Omega_2\right]\mathrm{M}, \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{d\nu} = -1 - \dfrac{2d}{\Theta}\,\Omega_1\mathrm{N}, & \dfrac{d\mathrm{V}}{d\nu} = -(\nu+\mathrm{U}) + \dfrac{2d}{\Theta}\left[(\lambda+\mu)\,\Omega_1 - \Omega_2\right]\mathrm{N}, \end{cases}$$

et dont les coefficients Ω_1, Ω_2, et Θ, satisfont bien tous à la condition demandée.

En remplaçant donc à présent A, M, N par leurs valeurs (17), dans les définitions (61) des coefficients Ω_1 et Ω_2, en même temps que dans ces dernières équations elles-mêmes, puis multipliant encore celles-ci respectivement par $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, et les ajoutant, il est clair que nous obtiendrons de même ainsi, à la place du système précédent (54), le suivant

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} dU = &-\left(1+\frac{\Omega_1}{\Theta}\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right)d\lambda-\left(1+\frac{\Omega_1}{\Theta}\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right)d\mu \\ &-\left(1+\frac{\Omega_1}{\Theta}\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right)d\nu, \\ dV = &\left[-(\lambda+U)+\frac{1}{\Theta}\left\{(\mu+\nu)\Omega_1-\Omega_2\right\}\sqrt{\frac{\lambda^2+U\lambda+V}{f(\lambda)}}\right]d\lambda \\ &+\left[-(\mu+U)+\frac{1}{\Theta}\left\{(\nu+\lambda)\Omega_1-\Omega_2\right\}\sqrt{\frac{\mu^2+U\mu+V}{f(\mu)}}\right]d\mu \\ &+\left[-(\nu+U)+\frac{1}{\Theta}\left\{(\lambda+\mu)\Omega_1-\Omega_2\right\}\sqrt{\frac{\nu^2+U\nu+V}{f(\nu)}}\right]d\nu, \end{aligned}\right.$$

dans lequel, Θ désignant toujours le produit (3), Ω_1 et Ω_2 seront maintenant les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_1 = &(\mu-\nu)\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}+(\nu-\lambda)\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)} \\ &+(\lambda-\mu)\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}, \\ \Omega_2 = &\lambda(\mu-\nu)\sqrt{f(\lambda)(\lambda^2+U\lambda+V)}+\mu(\nu-\lambda)\sqrt{f(\mu)(\mu^2+U\mu+V)} \\ &+\nu(\lambda-\mu)\sqrt{f(\nu)(\nu^2+U\nu+V)}. \end{aligned}\right.$$

Cette transformation préalable étant opérée, on intégrera, soit ce dernier système, soit le précédent (54), comme lors de notre première méthode exposée dans notre Chapitre V, soit à l'aide de la méthode de Mayer, qui exige un nombre moindre d'intégra-

tions, soit à l'aide de la méthode de Jacobi, exposée dans les *Vorlesungen*, pour le problème équivalent de l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, toutes relatives à une seule et même fonction inconnue. Mais bien que ce système ne renferme que les deux inconnues U et V, quelle que soit celle, des deux formes pour le système, ou des deux méthodes pour l'intégration, à laquelle on s'arrête, cette opération restera toujours beaucoup plus difficile que pour le système analogue (116) du Chapitre V, considéré lors de notre première méthode, qui contenait néanmoins celui-là trois inconnues, par la raison que celui-ci n'est plus, comme lui, linéaire et homogène par rapport aux inconnues elles-mêmes. C'est pourquoi, en vue d'épargner le temps et la peine du Lecteur, nous allons indiquer tout de suite le résultat de cette intégration, et au lieu d'y arriver par une recherche analytique ne supposant aucune connaissance à l'avance de la solution à intervenir (*), nous nous contenterons de montrer, par un calcul *a posteriori*, l'exactitude de la solution en question.

Nous plaçant donc à ce point de vue, et désignant par α, β, γ trois constantes supposées liées entre elles par la relation

$$\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1, \tag{64}$$

de manière que deux d'entre elles demeurent complètement arbitraires, puis faisant en outre, uniquement dans la pensée de faciliter l'écriture du résultat en question et celle des calculs ultérieurs,

$$(65)\left\{\begin{array}{ll} X = \sqrt{\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, & Y = \sqrt{\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}, \\ & Z = \sqrt{\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}, \end{array}\right.$$

(*) Nous effectuerons une recherche directe réalisant ces conditions par le moyen de la première des méthodes précitées, dans la Note suivante, à propos du Cas relatif au Système des Coordonnées Sphériques, déjà étudié dans notre Chapitre III, à l'aide du procédé simplifié, basé sur la considération des courbures, que nous avons employé pour tous les différents Cas particuliers du problème.

nous allons démontrer sans trop de peine, à l'aide de la seconde forme (63), que l'intégrale générale de ce système est représentée par les deux expressions (*) :

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} U &= (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) - (\lambda + \mu + \nu), \\ V &= \left(\frac{bc}{a}\alpha X + \frac{ca}{b}\beta Y + \frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\lambda\mu\nu. \end{aligned} \right.$$

Or, ces expressions renfermant deux constantes arbitraires, il suffit évidemment, pour établir ce fait, de s'assurer qu'elles satisfont simultanément, sous la seule condition (64) entre les trois constantes α, β, γ, aux six équations (62), lesquelles sont complètement équivalentes au système en question (63) : résultat que nous mettrons en évidence en calculant séparément, puis comparant, les valeurs que prendront les deux membres de chacune d'elles, lorsqu'on y attribuera aux inconnues U et V les valeurs que nous venons d'écrire.

A cet effet, remarquant que la première des expressions (65), par exemple, donnera, en en prenant d'abord le logarithme, puis la dérivée logarithmique,

$$lX = \frac{1}{2}\left[l(a^2 + \lambda) + l(a^2 + \mu) + l(a^2 + \nu)\right] + l.\text{const.},$$

d'où

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{d\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2 + \lambda}, \qquad \text{ou} \qquad 2\frac{dX}{d\lambda} = \frac{X}{a^2 + \lambda},$$

(*) Nous montrerons dans la Note V ci-après que cette même intégrale générale peut également être présentée sous cette autre forme, dont la symétrie est peut-être encore plus frappante :

$$\left\{ \begin{aligned} -U &= (\beta Y - \gamma Z)^2 + (\gamma Z - \alpha X)^2 + (\alpha X - \beta Y)^2 - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right], \\ -V &= a^2(\beta Y - \gamma Z)^2 + b^2(\gamma Z - \alpha X)^2 + c^2(\alpha X - \beta Y)^2 - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2). \end{aligned} \right.$$

Mais cette dernière forme, quoique plus simple en apparence, se prête en réalité moins commodément que la forme ci-dessus (66) aux calculs que nous avons l'intention d'effectuer dans la présente Note. C'est pourquoi nous ne croyons pas devoir en faire mention actuellement dans le texte.

il est clair que nous déduirons de cette simple valeur, en y permutant d'abord les trois constantes a^2, b^2, c^2, puis ensuite les trois variables λ, μ, ν, le tableau suivant des neuf dérivées analogues :

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{lll} 2\dfrac{dX}{d\lambda}=\dfrac{X}{a^2+\lambda}, & 2\dfrac{dY}{d\lambda}=\dfrac{Y}{b^2+\lambda}, & 2\dfrac{dZ}{d\lambda}=\dfrac{Z}{c^2+\lambda}, \\ 2\dfrac{dX}{d\mu}=\dfrac{X}{a^2+\mu}, & 2\dfrac{dY}{d\mu}=\dfrac{Y}{b^2+\mu}, & 2\dfrac{dZ}{d\mu}=\dfrac{Z}{c^2+\mu}, \\ 2\dfrac{dX}{d\nu}=\dfrac{X}{a^2+\nu}, & 2\dfrac{dY}{d\nu}=\dfrac{Y}{b^2+\nu}, & 2\dfrac{dZ}{d\nu}=\dfrac{Z}{c^2+\nu}. \end{array}\right.$$

Cela posé, ayant en vue les deux premières équations (62), les expressions en question (66) donneront dès lors, d'une part, pour les premiers membres respectifs de ces équations,

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} &= 2(\alpha X+6Y+\gamma Z)\left(\alpha\frac{dX}{d\lambda}+6\frac{dY}{d\lambda}+\gamma\frac{dZ}{d\lambda}\right)-1 \\ &= (\alpha X+6Y+\gamma Z)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda}+\frac{6Y}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right)-1, \\ \frac{dV}{d\lambda} &= 2\left(\frac{bc}{a}\alpha X+\frac{ca}{b}6Y+\frac{ab}{c}\gamma Z\right)\left(\frac{bc}{a}\alpha\frac{dX}{d\lambda}+\frac{ca}{b}6\frac{dY}{d\lambda}+\frac{ab}{c}\gamma\frac{dZ}{d\lambda}\right) \\ &\qquad -\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\mu\nu \\ &= \left(\frac{bc}{a}\alpha X+\frac{ca}{b}6Y+\frac{ab}{c}\gamma Z\right)\left(\frac{bc}{a}\frac{\alpha X}{a^2+\lambda}+\frac{ca}{b}\frac{6Y}{b^2+\lambda}+\frac{ab}{c}\frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right) \\ &\qquad -\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\mu\nu \\ &= \left(\frac{bc}{a}\right)^2\frac{\alpha^2X^2}{a^2+\lambda}+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\frac{6^2Y^2}{b^2+\lambda}+\cdots \\ &\quad +\frac{ca}{b}\frac{ab}{c}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\right)6Y.\gamma Z+\cdots-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{6^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\mu\nu. \end{aligned}\right.$$

Pour faciliter le calcul de la seconde de ces expressions, la supposant ordonnée par rapport aux constantes α, β, γ, nous la

représenterons par le développement

$$(69)\qquad \frac{dV}{d\lambda} = A_1\alpha^2 + B_1\beta^2 + C_1\gamma^2 + 2D_1\beta\gamma + 2E_1\gamma\alpha + 2F_1\alpha\beta,$$

dans lequel les deux coefficients de type différent A_1 et D_1 auront dès lors, d'après la dernière expression qui précède, respectivement pour valeurs

$$(70)\qquad A_1 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \frac{X^2}{a^2+\lambda} - \frac{\mu\nu}{a^2}, \qquad D_1 = a^2\left(\frac{1}{c^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda}\right) YZ.$$

Si alors nous introduisons encore les notations suivantes, déjà usitées dans notre Chapitre V, et qui nous seront de nouveau fort utiles pour la suite du calcul, savoir

$$(71)\qquad \begin{cases} S_1 = b^2 + c^2 - a^2, & S_2 = c^2 + a^2 + b^2, & S_3 = a^2 + b^2 - c^2, \\ G_1 = (a^2-b^2)(a^2-c^2), & G_2 = (b^2-c^2)(b^2-a^2), & G_3 = (c^2-a^2)(c^2-b^2), \end{cases}$$

les expressions (65) devenant avec ces notations, si on les élève au carré,

$$(72)\qquad \begin{cases} X^2 = \frac{1}{G_1}(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu), \qquad Y^2 = \frac{1}{G_2}(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu), \\ Z^2 = \frac{1}{G_3}(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu), \end{cases}$$

on voit que le premier de ces coefficients (70) pourra s'écrire, à l'aide des mêmes notations, en développant et réduisant, de la façon suivante:

$$(73)\qquad \begin{cases} A_1 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \frac{X^2}{a^2+\lambda} - \frac{\mu\nu}{a^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{b^2c^2}{G_1}(a^2+\mu)(a^2+\nu) - \mu\nu\right] \\ = \frac{1}{a^2G_1}\left[b^2c^2(a^2+\mu)(a^2+\nu) - \mu\nu(a^2-b^2)(a^2-c^2)\right] \\ = \frac{1}{a^2G_1}\left[b^2c^2\{a^4+(\mu+\nu)a^2+\mu\nu\} - \mu\nu\{a^4-(b^2+c^2)a^2+b^2c^2\}\right] \\ = \frac{1}{G_1}\left[b^2c^2(a^2+\mu+\nu) + S_1\mu\nu\right]. \end{cases}$$

Voyons maintenant ce que deviennent semblablement les seconds membres des mêmes équations (62) pour les valeurs (66) de U et V.

Calculons tout d'abord dans ce but les valeurs de Λ, M, N.

Si, dans cette pensée, nous représentons encore par un symbole spécial les numérateurs des expressions (18), c'est-à-dire si nous faisons

$$(74)\qquad \mathcal{L} = \lambda^2 + U\lambda + V, \qquad \mathcal{M} = \mu^2 + U\mu + V, \qquad \mathcal{N} = \nu^2 + U\nu + V,$$

ce qui nous permettra d'écrire ces expressions (18) sous la forme abrégée

$$(75)\qquad \Lambda^2 = \frac{1}{4d^2}\frac{\mathcal{L}}{f(\lambda)}, \qquad M^2 = \frac{1}{4d^2}\frac{\mathcal{M}}{f(\mu)}, \qquad N^2 = \frac{1}{4d^2}\frac{\mathcal{N}}{f(\nu)},$$

nous aurons, en partant des expressions (66), et tenant compte de la relation (64) entre les constantes, pour la valeur de la première des quantités (74),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \lambda^2 + \lambda\left[(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) - (\lambda + \mu + \nu)\right] \\
&\qquad + \left[\left(\frac{bc}{a}\alpha X + \frac{ca}{b}\beta Y + \frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\lambda\mu\nu\right] \\
&= \lambda\,(\alpha^2X^2 + \beta^2Y^2 + \gamma^2Z^2 + 2.\beta Y.\gamma Z + 2.\gamma Z.\alpha X + 2.\alpha X.\beta Y) \\
&\qquad - \lambda\left[a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + (\mu + \nu)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right] \\
&\quad + \frac{b^2c^2}{a^2}\alpha^2X^2 + \frac{c^2a^2}{b^2}\beta^2Y^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}\gamma^2Z^2 + 2a^2.\beta Y.\gamma Z + 2b^2.\gamma Z.\alpha X + 2c^2.\alpha X.\beta Y \\
&\qquad - \lambda\mu\nu\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right).
\end{aligned}$$

Si alors, en vue de faciliter le calcul, nous convenons encore de représenter, comme tout à l'heure, cette expression par le développement

$$(76)\qquad \mathcal{L} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta,$$

les deux coefficients de type différent A et D seront, pour cette quantité,

$$(77)\qquad A=\left(\lambda+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)X^2-\lambda\left(a^2+\mu+\nu+\frac{\mu\nu}{a^2}\right),\qquad D=(\lambda+a^2)YZ.$$

Or, si l'on a égard, en premier lieu, aux égalités (72) dont la première peut être écrite aussi bien sous les trois formes

$$(77^{\text{bis}})\quad \frac{G_1X^2}{a^2+\lambda}=(a^2+\mu)(a^2+\nu),\qquad \frac{G_1X^2}{a^2+\mu}=(a^2+\nu)(a^2+\lambda),\qquad \frac{G_1X^2}{a^2+\nu}=(a^2+\lambda)(a^2+\mu),$$

puis, en second lieu, à cette identité déjà employée dans notre Chapitre V et que fournit la simple division algébrique, savoir :

$$(78)\qquad \frac{f(\rho)}{(a^2+\rho)^2}=\frac{(b^2+\rho)(c^2+\rho)}{a^2+\rho}=\rho+S_1+\frac{G_1}{a^2+\rho},$$

les coefficients S_1 et G_1 étant toujours les quantités (71), et enfin en même temps à cette dernière égalité, déduite immédiatement de ces mêmes définitions (71), savoir:

$$(79)\qquad \frac{G_1-b^2c^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}\Big[\{a^4-(b^2+c^2)a^2+b^2c^2\}-b^2c^2\Big]=a^2-(b^2+c^2)=-S_1,$$

on trouvera successivement, sans peine, pour les valeurs des deux coefficients précités (77),

$$\left\{\begin{aligned}
A&=\left(\lambda+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)X^2-\frac{\lambda}{a^2}(a^2+\mu)(a^2+\nu)\\
&=\left(\lambda+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)X^2-\frac{\lambda}{a^2}\frac{G_1X^2}{a^2+\lambda}=\left[\lambda+\frac{b^2c^2}{a^2}-\frac{G_1}{a^2}\frac{\lambda}{a^2+\lambda}\right]X^2\\
&=\left[\lambda+\frac{b^2c^2}{a^2}-\frac{G_1}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{a^2+\lambda}\right)\right]X^2=\left[\lambda-\frac{G_1-b^2c^2}{a^2}+\frac{G_1}{a^2}\frac{a^2}{a^2+\lambda}\right]X^2\\
&=\left(\lambda+S_1+\frac{G_1}{a^2+\lambda}\right)X^2=\frac{f(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2}X^2,\\
D&=(a^2+\lambda)YZ=f(\lambda)\cdot\frac{Y}{b^2+\lambda}\cdot\frac{Z}{c^2+\lambda},
\end{aligned}\right.$$

de sorte que, par la simple permutation du groupe (a^2, b^2, c^2) qui entraîne celle des trois quantités X, Y, Z (65), nous aurons immédiatement, pour la valeur des six coefficients du développement (76),

$$\left\{\begin{array}{lll} A = f(\lambda)\left(\frac{X}{a^2+\lambda}\right)^2, & B = f(\lambda)\left(\frac{Y}{b^2+\lambda}\right)^2, & C = f(\lambda)\left(\frac{Z}{c^2+\lambda}\right)^2, \\ D = f(\lambda)\frac{Y}{b^2+\lambda}\,\frac{Z}{c^2+\lambda}, & E = f(\lambda)\frac{Z}{c^2+\lambda}\,\frac{X}{a^2+\lambda}, & F = f(\lambda)\frac{X}{a^2+\lambda}\,\frac{Y}{b^2+\lambda}, \end{array}\right.$$

et, par suite, pour ce développement lui-même,

$$\mathcal{L} = f(\lambda)\Big[\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta Y}{b^2+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right)^2 + 2\frac{\beta Y}{b^2+\lambda}\,\frac{\gamma Z}{c^2+\lambda} + 2\frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\,\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + 2\frac{\alpha X}{a^2+\lambda}\,\frac{\beta Y}{b^2+\lambda}\Big],$$

d'où, par conséquent, en permutant maintenant le groupe (λ, μ, ν), pour nos quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, les trois valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L} = f(\lambda)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + \frac{\beta Y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right)^2, \\ \mathcal{M} = f(\mu)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\mu} + \frac{\beta Y}{b^2+\mu} + \frac{\gamma Z}{c^2+\mu}\right)^2, \\ \mathcal{N} = f(\nu)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\nu} + \frac{\beta Y}{b^2+\nu} + \frac{\gamma Z}{c^2+\nu}\right)^2, \end{array}\right.$$

et enfin, en reportant ces valeurs elles-mêmes dans les expressions ci-dessus (75), puis extrayant alors les racines, nous aurons définitivement pour les expressions cherchées de Λ, M, N, les trois suivantes

$$(80)\quad\left\{\begin{array}{l} \Lambda = \pm\frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + \frac{\beta Y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right), \\ M = \pm\frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha X}{a^2+\mu} + \frac{\beta Y}{b^2+\mu} + \frac{\gamma Z}{c^2+\mu}\right), \\ N = \pm\frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha X}{a^2+\nu} + \frac{\beta Y}{b^2+\nu} + \frac{\gamma Z}{c^2+\nu}\right), \end{array}\right.$$

dans lesquelles nous supposerons expressément que nous prenions le même signe pour toutes les trois. Nous reconnaîtrons un peu plus loin la nécessité de cette restriction.

Une fois en possession de ce premier résultat, les définitions (61) nous donneront sans peine, pour les valeurs des deux coefficients Ω_1 et Ω_2 (*), en faisant porter le signe commun aux trois expressions précédentes sur le premier membre des égalités que nous allons écrire,

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned}
\pm\Omega_1 = {} & \left[(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{a^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{a^2+\nu}\right]\alpha X \\
& + \left[(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{b^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{b^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{b^2+\nu}\right]6Y \\
& + \left[(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{c^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{c^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{c^2+\nu}\right]\gamma Z, \\
\pm\Omega_2 = {} & \left[(\mu-\nu)\frac{\lambda f(\lambda)}{a^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{\mu f(\mu)}{a^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{\nu f(\nu)}{a^2+\nu}\right]\alpha X \\
& + \left[(\mu-\nu)\frac{\lambda f(\lambda)}{b^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{\mu f(\mu)}{b^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{\nu f(\nu)}{b^2+\nu}\right]6Y \\
& + \left[(\mu-\nu)\frac{\lambda f(\lambda)}{c^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{\mu f(\mu)}{c^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{\nu f(\nu)}{c^2+\nu}\right]\gamma Z.
\end{aligned}\right.$$

Or, comme l'on trouve aisément, en développant et réduisant, puis ayant égard aux identités (59),

(*) C'est ici qu'apparaît clairement l'avantage très grand de la seconde forme (63) que nous avons donnée à notre système d'équations différentielles totales, ou, ce qui revient au même, de la forme (62) donnée à nos équations (23), car étant données les expressions (80) de Λ, M, N, et celles des différences M — N, N — Λ, Λ — M qui en résultent, le calcul des produits qui composent les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ... $\mathcal{F}$ (22) eût été notablement plus pénible que celui des coefficients Ω_1 et Ω_2 (61), que nous obtiendrons, au contraire, comme on va le voir, avec une très grande facilité, à cause de leur symétrie en λ, μ, ν d'une part, et aussi de celle en Λ, M, N d'autre part, qui est une conséquence nécessaire de la première.

$$(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{a^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{a^2+\nu}$$
$$=(\mu-\nu).(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(\nu-\lambda).(b^2+\mu)(c^2+\mu)+(\lambda-\mu).(b^2+\nu)(c^2+\nu)$$
$$=(\mu-\nu)\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\lambda+\lambda^2\right]+(\nu-\lambda)\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\mu+\mu^2\right]$$
$$+(\lambda-\mu)\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\nu+\nu^2\right]$$
$$=(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2=-\Theta,$$

$$(\mu-\nu)\frac{\lambda f(\lambda)}{a^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{\mu f(\mu)}{a^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{\nu f(\nu)}{a^2+\nu}$$
$$=(\mu-\nu).\lambda(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(\nu-\lambda).\mu(b^2+\mu)(c^2+\mu)+(\lambda-\mu).\nu(b^2+\nu)(c^2+\nu)$$
$$=(\mu-\nu).\lambda\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\lambda+\lambda^2\right]+(\nu-\lambda).\mu\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\mu+\mu^2\right]$$
$$+(\lambda-\mu).\nu\left[b^2c^2+(b^2+c^2)\nu+\nu^2\right]$$
$$=(b^2+c^2)\left[(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2\right]+\left[(\mu-\nu)\lambda^3+(\nu-\lambda)\mu^3+(\lambda-\mu)\nu^3\right]$$
$$=-\Theta(b^2+c^2)-\Theta(\lambda+\mu+\nu),$$

il est clair que l'on obtiendra, en permutant le groupe (a^2, b^2, c^2) dans les deux égalités que nous venons d'écrire, puis remettant à chaque fois les expressions ainsi obtenues dans les précédentes (81), pour les valeurs cherchées des deux coefficients Ω_1 et Ω_2, les deux suivantes

$$(82)\quad\left\{\begin{aligned}&\pm\Omega_1=-\Theta(\alpha X+\beta Y+\gamma Z),\\&\pm\Omega_2=-\Theta\left[(b^2+c^2+\lambda+\mu+\nu)\alpha X+(c^2+a^2+\lambda+\mu+\nu)\beta Y\right.\\&\qquad\qquad\left.+(a^2+b^2+\lambda+\mu+\nu)\gamma Z\right],\end{aligned}\right.$$

le signe étant, par hypothèse, le même devant ces deux expressions que devant chacune des valeurs (80) de Λ, M, N.

De là, nous conclurons maintenant les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned}&\pm\frac{\Omega_1}{\Theta}=-(\alpha X+\beta Y+\gamma Z),\\&\pm\left[(\mu+\nu)\Omega_1-\Omega_2\right]=\Theta\left[(b^2+c^2+\lambda)\alpha X+(c^2+a^2+\lambda)\beta Y+(a^2+b^2+\lambda)\gamma Z\right],\end{aligned}\right.$$

et de ces deux dernières enfin, en même temps que des valeurs (80),

le signe étant le même, par hypothèse, dans toutes ces égalités à la fois, ces deux autres

$$(83)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2d}{\Theta}\Omega.\Lambda = -(\alpha X + 6Y + \gamma Z)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + \frac{6Y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right), \\ &\frac{2d}{\Theta}\left[(\mu+\nu)\Omega_1 - \Omega_2\right].\Lambda = \left[(b^2+c^2+\lambda)\alpha X + (c^2+a^2+\lambda)6Y \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (a^2+b^2+\lambda)\gamma Z\right]\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + \frac{6Y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right), \end{aligned} \right.$$

dont la première donnant immédiatement, pour le second membre de la première équation de gauche (62),

$$-1 - \frac{2d}{\Theta}\Omega.\Lambda = (\alpha X + 6Y + \gamma Z)\left(\frac{\alpha X}{a^2+\lambda} + \frac{6Y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma Z}{c^2+\lambda}\right) - 1,$$

valeur identique à celle (68) déjà obtenue plus haut pour le premier membre, montre que cette équation de gauche est bien satisfaite par les expressions (66) de U et V.

Pour vérifier semblablement le même fait à l'égard de la première équation de droite, nous désignerons, en vue de faciliter la transformation, par Δ son second membre, supposé calculé en partant des mêmes expressions (66), c'est-à-dire que nous poserons, avec cette acception,

$$(84)\qquad \Delta = -(\lambda + U) + \frac{2d}{\Theta}\left[(\mu+\nu)\Omega_1 - \Omega_2\right].\Lambda;$$

et comme cette expression, qui, eu égard aux valeurs (66) de U, (82) de Ω_1 et Ω_2, et (80) de Λ, est évidemment du second degré relativement aux constantes α, 6, γ, pourra toujours être rendue homogène par rapport à ces quantités à l'aide de la relation (64), nous pourrons dès lors, en l'ordonnant par rapport à ces mêmes quantités, la supposer, comme nous l'avons fait pour le premier membre, représentée par un développement tel que

$$(85)\qquad \Delta = A_2\alpha^2 + B_2 6^2 + C_2\gamma^2 + 2D_2 6\gamma + 2E_2\gamma\alpha + 2F_2\alpha 6.$$

Or l'expression (66) de U donnera, d'une part, en ayant égard à la relation (64),

$$\lambda + U = \alpha^2X^2 + \beta^2Y^2 + \gamma^2Z^2 + 2.\beta Y.\gamma Z + 2.\gamma Z.\alpha X + 2.\alpha X.\beta Y$$
$$- \left[(a^2 + \mu + \nu)\,\alpha^2 + (b^2 + \mu + \nu)\beta^2 + (c^2+\mu+\nu)\gamma^2\right].$$

D'autre part, la seconde expression (83), étant développée, deviendra, en n'écrivant qu'un seul terme de chaque type,

$$\frac{2d}{\Theta}\left[(\mu + \nu)\,\Omega_1 - \Omega_2\right].\Lambda = (b^2 + c^2 + \lambda)\frac{\alpha^2X^2}{a^2 + \lambda} + \cdots$$
$$+ \left(\frac{c^2+a^2+\lambda}{c^2 + \lambda} + \frac{a^2+b^2+\lambda}{b^2 + \lambda}\right)\beta Y.\gamma Z + \cdots$$
$$= (b^2+c^2+\lambda)\frac{\alpha^2X^2}{a^2+\lambda} + \cdots + \left(2 + \frac{a^2}{c^2 + \lambda} + \frac{a^2}{b^2 + \lambda}\right)\beta Y.\gamma Z + \cdots$$

En retranchant donc de cette dernière égalité la précédente, nous obtiendrons immédiatement, en vertu de la définition (84) de Δ,

$$\Delta = \left(\frac{b^2+c^2+\lambda}{a^2 + \lambda} - 1\right)\alpha^2X^2 + \cdots + \left(\frac{a^2}{c^2 + \lambda} + \frac{a^2}{b^2 + \lambda}\right)\beta Y.\gamma Z + \cdots$$
$$+ (a^2 + \mu + \nu)\,\alpha^2 + (b^2 + \mu + \nu)\,\beta^2 + (c^2 + \mu + \nu)\,\gamma^2,$$

d'où il suit que les deux coefficients, de type différent, A_2 et D_2, auront respectivement pour expression

$$\left\{\begin{aligned} A_2 &= \left[b^2 + c^2 + \lambda - (a^2 + \lambda)\right]\frac{X^2}{a^2 + \lambda} + a^2 + \mu + \nu,\\ D_2 &= a^2\left(\frac{1}{c^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda}\right)YZ.\end{aligned}\right.$$

De ces deux coefficients, le second D_2 est déjà identique, comme l'on voit, au coefficient homologue D_1 (70) rencontré plus haut pour le développement du premier membre de la même équation. Quant au premier A_2, il se transformera très

aisément encore, à l'aide des notations (71) et des égalités déjà employées (72) et (79), de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
A_2 &= (b^2 + c^2 - a^2).\frac{1}{G_1}(a^2+\mu)(a^2+\nu) + a^2 + \mu + \nu \\
&= \frac{1}{G_1}\left[S_1 \{ a^2(a^2+\mu+\nu) + \mu\nu \} + G_1(a^2+\mu+\nu)\right] \\
&= \frac{1}{G_1}\left[(G_1 + a^2 S_1)(a^2+\mu+\nu) + S_1\mu\nu\right] \\
&= \frac{1}{G_1}\left[b^2c^2(a^2+\mu+\nu) + S_1\mu\nu\right],
\end{aligned}
$$

expression identique, de nouveau, à celle du coefficient homologue A_1 déjà obtenue ci-dessus (73).

La coïncidence exacte de ces deux couples d'expressions, qui entraîne évidemment, par la permutation du groupe (a^2, b^2, c^2), celle de tous les autres homologues, montre que ces deux développements (69) et (85) sont effectivement identiques, et que, par conséquent, eu égard à la définition (84) de Δ, la première équation de droite (62) est bien vérifiée, elle aussi, par les expressions (66) de U et V. Et il en serait évidemment de même pour les quatre autres équations (62), qui se déduisent de ces deux premières par une nouvelle permutation, à savoir celle des deux autres groupes (λ, μ, ν) et (Λ, M, N).

Les deux expressions (66), qui renferment deux constantes arbitraires, constituent donc bien, ainsi que nous l'avions annoncé, l'intégrale générale du système des deux équations différentielles totales (63) ou (54). Dans ces conditions, la théorie exposée dans le paragraphe premier de cette Note établit l'existence de la solution à chercher, et montre que ses dérivées en λ, μ, ν seront les valeurs (17), dans lesquelles on aura remis, à la place de U et V, lesdites expressions (66), c'est-à-dire, par conséquent, que ces mêmes dérivées seront précisément les expressions (80), déjà calculées pour les besoins de la démonstration précédente, lesquelles satisfont dès lors assurément à la

condition d'intégrabilité, et nous fourniront en conséquence, par leur simple quadrature, la solution cherchée.

Et en effet, le même calcul effectué tout à l'heure nous en fournit également la preuve évidente par le simple rapprochement des deux tableaux (80) et (67), car il en ressort immédiatement, pour les dérivées Λ, M, N, cette nouvelle forme d'expressions

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} \Lambda &= \pm\frac{1}{d}\left(\alpha\frac{dX}{d\lambda}+\beta\frac{dY}{d\lambda}+\gamma\frac{dZ}{d\lambda}\right),\\ M &= \pm\frac{1}{d}\left(\alpha\frac{dX}{d\mu}+\beta\frac{dY}{d\mu}+\gamma\frac{dZ}{d\mu}\right),\\ N &= \pm\frac{1}{d}\left(\alpha\frac{dX}{d\nu}+\beta\frac{dY}{d\nu}+\gamma\frac{dZ}{d\nu}\right),\end{aligned}\right.$$

lesquelles, étant multipliées respectivement par $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ et ajoutées, donneront dès lors, pour la différentielle du,

$$du = \Lambda d\lambda + M d\mu + N d\nu = \pm\frac{1}{d}(\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ),$$

à la seule condition de prendre, ainsi que nous l'avons expressément supposé jusqu'ici, précisément en vue de cette circonstance, le même signe + ou —, à la fois devant les trois expressions (80) ou (86); et ce faisant, l'expression demandée de u sera dès lors la suivante :

$$(87)\qquad u = u_0 + \frac{1}{d}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z),$$

le double signe étant désormais sans intérêt, du moment que α et β peuvent être pris arbitrairement, et que γ représentera alors, par hypothèse, la valeur

$$(88)\qquad \gamma = \pm\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$$

qui comporte elle-même, comme l'on voit, ce double signe.

Nous n'avons donc plus à nous préoccuper désormais que de la seconde condition énoncée à la fin de notre paragraphe pre-

mier (p. 74), et l'opération y spécifiée sous le numéro 4° nous reste seule à accomplir, à savoir de disposer, en admettant que cela soit possible, des arbitraires α, 6, γ, supposées liées par la relation (64) ou (88), et correspondant aux trois coordonnées x, y, z, de manière à procurer, quelles que soient les variables λ. μ, ν, la vérification des trois équations (53).

A cet effet, reprenant pour nos dérivées Λ, M, N la notation synthétique déjà employée dans notre paragraphe premier, à savoir celle définie par la première formule (36), laquelle nous permettra dès lors de comprendre les trois expressions (80) sous le type unique

$$R = \pm \frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha X}{a^2 + \rho} + \frac{6Y}{b^2 + \rho} + \frac{\gamma Z}{c^2 + \rho}\right),$$

nous en conclurons, par conséquent, pour les deux dérivées, relatives à la même variable indépendante, de deux coordonnées u différentes,

$$R' = \pm \frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha' X}{a^2 + \rho} + \frac{6' Y}{b^2 + \rho} + \frac{\gamma' Z}{c^2 + \rho}\right), \quad R'' = \pm \frac{1}{2d}\left(\frac{\alpha'' X}{a^2 + \rho} + \frac{6'' Y}{b^2 + \rho} + \frac{\gamma'' Z}{c^2 + \rho}\right),$$

et par suite enfin, pour leur produit :

$$R'R'' = \frac{1}{4d^2}\left[\alpha'\alpha''\frac{X^2}{(a^2 + \rho)^2} + 6'6''\frac{Y^2}{(b^2 + \rho)^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + (6'\gamma'' + 6''\gamma')\frac{Y}{b^2 + \rho}\frac{Z}{c^2 + \rho} + \cdots\right].$$

En faisant dès lors dans cette expression successivement $\rho = \lambda, \mu, \nu$, puis remettant à chaque fois la valeur ainsi obtenue dans la dernière des trois équations en question (53), et la multipliant par $4d^2$, il est clair qu'elle se présentera alors sous la forme du développement

(89) $$\mathfrak{A}.\alpha'\alpha'' + \mathfrak{B}.6'6'' + \cdots 2\mathfrak{D}(6'\gamma'' + 6''\gamma') + \cdots = 0,$$

dans lequel les deux coefficients, de type différent, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$, seront les expressions

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \left[(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{(a^2+\mu)^2}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{(a^2+\nu)^2}\right]X^2,\\ \mathfrak{D} &= \left[(\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{(b^2+\mu)(c^2+\mu)}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{(b^2+\nu)(c^2+\nu)}\right]YZ,\end{aligned}\right.$$

lesquelles, en ayant égard de nouveau à l'identité (78) et aux égalités (77bis), ainsi qu'à la définition du symbole $f(\rho)$, se transformeront successivement, sans peine, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \left[(\mu-\nu)\left(\lambda+S_1+\frac{G_1}{a^2+\lambda}\right)+(\nu-\lambda)\left(\mu+S_1+\frac{G_1}{a^2+\mu}\right)+(\lambda-\mu)\left(\nu+S_1+\frac{G_1}{a^2+\nu}\right)\right]X^2\\ &= (\mu-\nu)\frac{G_1X^2}{a^2+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{G_1X^2}{a^2+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{G_1X^2}{a^2+\nu}\\ &= (\mu-\nu).(a^2+\mu)(a^2+\nu)+(\nu-\lambda).(a^2+\nu)(a^2+\lambda)+(\lambda-\mu).(a^2+\lambda)(a^2+\mu)\\ &= (\mu-\nu)\left[a^4+(\mu+\nu)a^2+\mu\nu\right]+(\nu-\lambda)\left[a^4+(\nu+\lambda)a^2+\nu\lambda\right]+(\lambda-\mu)\left[a^4+(\lambda+\mu)a^2+\lambda\mu\right]\\ &= (\mu-\nu)\mu\nu+(\nu-\lambda)\nu\lambda+(\lambda-\mu)\lambda\mu=(\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2\\ &= -(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)=-\Theta,\end{aligned}$$

$$\mathfrak{D} = \left[(\mu-\nu)(a^2+\lambda)+(\nu-\lambda)(a^2+\mu)+(\lambda-\mu)(a^2+\nu)\right]YZ=0.$$

D'où il suit que l'équation en question (89) se réduira simplement à la suivante

$$\Theta(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')=0,$$

et, par conséquent, en permutant les trois coordonnées rectilignes, pour passer d'une équation (53) à la suivante, supprimant le facteur variable Θ qui ne saurait être nul, et joignant enfin aux trois relations analogues engendrées par l'hypothèse (64), l'on voit que toutes les conditions voulues seront bien remplies, en établissant entre les neuf constantes d'intégration α, β, γ, les

six relations

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha'^2 + 6'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha''\alpha''' + 6''6''' + \gamma''\gamma''' = 0, \\ \alpha''^2 + 6''^2 + \gamma''^2 = 1, & \alpha'''\alpha' + 6'''6' + \gamma'''\gamma' = 0, \\ \alpha'''^2 + 6'''^2 + \gamma'''^2 = 1, & \alpha'\alpha'' + 6'6'' + \gamma'\gamma'' = 0, \end{array}\right.$$

qui montrent qu'elles pourront s'interpréter comme les neuf cosinus d'un nouveau système d'axes rectangulaires, dont le choix demeure entièrement arbitraire.

Sous ces conditions, les trois équations issues de la formule intégrale (87), savoir

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \frac{1}{d}(\alpha'X + 6'Y + \gamma'Z), \\ y = y_0 + \frac{1}{d}(\alpha''X + 6''Y + \gamma''Z), \\ z = z_0 + \frac{1}{d}(\alpha'''X + 6'''Y + \gamma'''Z), \end{array}\right.$$

dans lesquelles X, Y, Z sont toujours, par hypothèse, les expressions (65) des variables λ, μ, ν, représentent donc définitivement la solution la plus générale de la question, et l'on voit qu'elle reproduit bien exactement, comme cela devait être, celle déjà obtenue par une autre méthode, dans notre Chapitre V.

III

Si, au contraire, préoccupé surtout de la solution à intervenir et pressé d'arriver au terme de la recherche, le Lecteur se trouve disposé à faire bon marché de l'homogénéité de la méthode en vue d'une rapidité et d'une facilité plus grandes dans la conquête du résultat, il pourra s'épargner le souci des calculs assez laborieux du paragraphe précédent, nécessités par le développement effectif de la méthode exposée dans le paragraphe premier, en invoquant alors, pour en tenir lieu, les résultats obtenus dans

la Note II ci-dessus, relativement à la constitution de toutes pièces d'un certain système orthogonal, à l'aide de la méthode d'induction simple et rationnelle que nous y avons exposée. Car, si l'on se fonde sur ce résultat, il suffira, comme on va le voir, pour arriver tout de suite à la solution complète de la question, de cette conclusion, que l'on peut déduire très rapidement de la théorie développée dans notre paragraphe premier, à savoir que la solution la plus générale du problème ne saurait renfermer plus de dix constantes arbitraires.

En effet, les trois relations (53) ne pouvant être vérifiées identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les variables λ, μ, ν, qu'au moyen de simples relations entre les constantes qui y figurent, ainsi que nous l'avons déjà expliqué, l'on reconnaît aisément que le nombre de ces relations ne saurait être inférieur à celui de ces équations elles-mêmes, c'est-à-dire à trois distinctes. Car, chacune de ces équations ne pouvant être vérifiée, quelles que soient λ, μ, ν, qu'en établissant à tout le moins une relation entre les constantes qui y figurent, supposer que le nombre desdites relations pour les trois équations (53) puisse être inférieur à trois, c'est supposer que deux de ces équations (ou les trois ensemble) puissent se trouver vérifiées à l'aide d'une même relation entre les constantes qui entrent dans chacune. Or, il est bien facile de voir que cette hypothèse est impossible, en raison de ce que ce ne sont pas les mêmes constantes C_1 et C_2 qui figurent dans chacune des trois équations (53). En effet, la première, par exemple, contenant seulement C_1'', C_2'' et C_1''', C_2''', et la seconde seulement C_1''', C_2''' et C_1', C_2', pour que ces deux équations se trouvassent vérifiées à l'aide d'une même relation entre les constantes, il faudrait que cette relation contînt seulement C_1''' et C_2''', avec les constantes données a^2, b^2, c^2. Mais la loi de permutation circulaire à laquelle obéissent toutes les équations successivement envisagées par nous dans la théorie ci-dessus, exigerait alors que la deuxième et la troisième équation (53) fussent de même vérifiées simultanément à l'aide d'une même relation entre les seules constantes C_1', C_2' et les constantes données, et par la même raison, la troisième et la pre-

mière équation devraient se trouver vérifiées simultanément à l'aide d'une même relation entre les seules constantes C_1'' et C_2'' et les constantes données : résultat en contradiction manifeste avec l'hypothèse de deux relations distinctes seulement entre les constantes, d'où nous étions parti tout à l'heure.

On voit donc ainsi que chaque équation (53) exigera pour être vérifiée quelles que soient λ, μ, ν, au moins une relation entre les constantes, qui sera différente en passant de l'une de ces équations à la suivante, c'est-à-dire que la vérification de ces trois équations (53) exigera, au total, *au moins trois* relations distinctes, qu'on doit *a priori* supposer de la forme

$$F(a^2, b^2, c^2, \quad C_1', C_1'', C_1''', \quad C_2', C_2'', C_2''') = 0,$$

et d'où l'on pourra tirer, par conséquent, les valeurs de trois des constantes d'intégration, C_2', C_2'', C_2''', par exemple, en fonction des constantes données, et des trois autres C_1', C_1'', C_1''', qui pourront seules, celles-là, demeurer réellement arbitraires.

Par où l'on voit que les expressions de U et V pour les trois coordonnées x, y, z, c'est-à-dire les six expressions (51), et par suite aussi les expressions (52) des neuf dérivées de A, M, N, correspondant à la solution la plus générale du problème, pourront renfermer, en sus des constantes données a^2, b^2, c^2, d^2, *au plus trois* constantes arbitraires nouvelles C_1', C'', C_1''. Et dans l'hypothèse où il existera une solution du problème, comme les valeurs définitives des trois coordonnées x, y, z seront alors fournies, ainsi que nous l'avons expliqué, par la quadrature des trois différentielles

$$(90)\quad \begin{cases} dx = A'd\lambda + M'd\mu + N'd\nu, \qquad dy = A''d\lambda + M''d\mu + N''d\nu, \\ \qquad\qquad dz = A'''d\lambda + M'''d\mu + N'''d\nu, \end{cases}$$

on voit que, dans le cas le plus général, ces expressions renfermeront seulement trois nouvelles constantes simplement additives x_0, y_0, z_0, en sus des constantes a^2, b^2, c^2, d^2, et des trois constantes précitées C_1', C_1'', C_1'''.

En conséquence, jusqu'à ce que l'on ait effectué en réalité les calculs indiqués au paragraphe premier, il sera donc impossible à la vérité, d'affirmer que le problème comporte une solution quelconque, particulière ou générale, car des deux conditions spécifiées à la fin de ce paragraphe (p. 74), si la première peut bien, il est vrai, être vérifiée, avant tout essai d'intégration, sur le système d'équations différentielles proposé lui-même, la seconde condition, tout au moins, ne pourra être également vérifiée que lorsque l'on sera en possession des six valeurs (51) de U et V, c'est-à-dire, par conséquent, lorsque le système différentiel en question (24) aura été complètement intégré. Mais, ce que l'on pourra du moins ainsi affirmer en pleine certitude, avant toute intégration, c'est à savoir que, si par un procédé quelconque on a rencontré une solution déterminée renfermant les dix constantes arbitraires précitées, dont trois simplement additives, cette même solution constituera bien la solution la plus générale possible du problème proposé. Or cette seule conclusion suffit pour nous mettre de suite en possession de la réponse la plus générale à la question envisagée présentement dans cette Note, ou antérieurement dans le Chapitre V, sans que nous soyons obligés d'effectuer en réalité l'intégration du système d'équations différentielles totales (24) ou (54).

En effet, d'une part, nous étant proposé, dans la Note précédente, de constituer directement de toutes pièces, par des procédés rationnels et des déductions logiquement et naturellement amenées, un système orthogonal dont l'une des trois familles fût le type le plus général des familles isothermes de surfaces du second ordre, lequel comporte, comme nous l'avons vu dans notre Chapitre II, quatre paramètres ou constantes arbitraires a^2, b^2, c^2, d^2, nous avons reconnu très aisément alors, par l'intégration d'une seule équation différentielle du premier ordre, qu'on réalisait un semblable système avec trois familles de surfaces appartenant au même type en question, mais de variétés différentes, système qui est dès lors, non seulement orthogonal, mais encore triplement isotherme.

D'autre part, invoquant en conséquence ce résultat si net et si

facilement acquis, en comparaison des calculs qu'exigerait soit l'intégration directe de notre système d'équations différentielles totales (54), soit simplement la vérification *a posteriori* de son intégrale générale supposée donnée, ainsi que nous l'avons fait dans notre paragraphe II, si l'on y effectue un simple changement de coordonnées rectilignes, opération que nous avons déjà accomplie dans le Chapitre II pour mettre le type en question (116) ou (127) sous la forme (128), l'on voit que les coefficients de chacune des trois familles contiendront de nouveau, dans leurs expressions (129), les dix constantes arbitraires, déjà énumérées à cette occasion-là, savoir, d'abord les quatre constantes antérieures a^2, b^2, c^2, d^2, puis trois autres nouvelles x_0, y_0, z_0, qui, relativement aux expressions des x, y, z, seront simplement additives, et enfin neuf cosinus liés entre eux par six relations, ce qui équivaut, en sus des précédentes, à trois nouvelles constantes réellement arbitraires seulement. D'où il suit que le système orthogonal que nous venons de définir, après cette simple transformation de coordonnées qui n'altérera en rien, d'après la propriété caractéristique de l'invariant Δ_2 établi dans notre Chapitre Ier, l'isothermie de chacune des trois familles envisagées, satisfera bien alors à la condition spécifiée tout à l'heure, à savoir de renfermer dans son expression analytique les dix constantes arbitraires que nous avons dit : et, par conséquent, nous sommes parfaitement certains que ledit système constituera à lui seul la solution la plus générale du problème tout entier, que nous nous sommes proposé dans cette Note.

NOTE IV

APPLICATION SUCCESSIVE ET COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES EXPOSÉES POUR LE MÊME PROBLÈME, A PROPOS DU CAS PARTICULIER CORRESPONDANT AU SYSTÈME SPHÉRIQUE.

Nous avons établi successivement, dans notre Chapitre V d'abord, puis en second lieu dans la Note III précédente, deux méthodes entièrement différentes pour le même problème, consistant à déterminer, dans le Cas le plus général, en partant des expressions trouvées dans le Chapitre IV pour les invariants Δ_1 relatifs aux trois coordonnées curvilignes, les équations exactes des trois familles de surfaces correspondantes, ou, ce qui revient au même, les expressions des trois coordonnées rectilignes x, y, z en fonction de ces coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ.

Afin de permettre au Lecteur de mieux se rendre compte, par la comparaison de ces méthodes appliquées à un même Cas, de la différence profonde de leurs caractères essentiels et des calculs auxquels elles conduisent, nous allons encore traiter, successivement par l'une et par l'autre, le Cas particulier intéressant relatif au Système Sphérique que nous avons déjà examiné sous le numéro IV° dans notre Chapitre III, et nous retrouverons ainsi de nouveau, sans trop de difficulté, aussi bien par l'une que par l'autre méthode, les mêmes résultats déjà rencontrés dans ce Chapitre et formulés par nos trois équations (127).

I

(Ire MÉTHODE.) — De même qu'au début de notre Chapitre V, le point de départ de nos calculs sera encore nécessairement les expressions assignées, pour ce Cas particulier, aux trois fonctions P, Q, R par les six équations des premier et second ordres (13) et (19) de notre Chapitre III, valeurs que nous avons trouvé très

aisément dans ledit Chapitre être les expressions (113) et (117), c'est-à-dire les trois suivantes

$$P = \frac{1}{(c\psi + cc')^2}, \qquad Q = \frac{\frac{a^2}{c^2}}{\mathrm{csh}^2(a\varpi + b)}, \qquad R = \frac{C^2}{(c\psi + cc')^2},$$

au sujet desquelles nous pouvons encore observer, de même que pour les expressions (83) du Chapitre V, que les coordonnées curvilignes n'y figurent que par les deux expressions linéaires à coefficients arbitraires $c\psi + cc'$, $a\varpi + b$, qui ne sont autre chose, par conséquent, que les paramètres thermométriques, entendus dans le sens le plus général, des deux familles de surfaces correspondantes; en sorte qu'en convenant de nouveau de désigner simplement par ψ et ϖ ces mêmes paramètres, ou, ce qui est la même chose, en faisant, pour simplifier,

$$a = c = 1, \qquad b = 0, \qquad c' = 0, \qquad \text{et en outre} \qquad C = 1,$$

lesdites expressions deviendront et engendreront alors les valeurs consignées dans le tableau suivant :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{llll} P = R = \frac{1}{\psi^2}, & Q = \frac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}, & lP = lR = -2l\psi, & lQ = -2l\mathrm{csh}\varpi, \\ QR = PQ = \frac{1}{\psi^2\mathrm{csh}^2\varpi}, & RP = \frac{1}{\psi^4}, & lQR = lPQ = -2(l\psi + l\mathrm{csh}\varpi), & lRP = -4l\psi, \\ \frac{Q}{P} = \frac{\psi^2}{\mathrm{csh}^2\varpi}, & \frac{R}{Q} = \frac{\mathrm{csh}^2\varpi}{\psi^2}, & \frac{P}{R} = 1, & \\ \frac{R}{P} = 1, & \frac{P}{Q} = \frac{\mathrm{csh}^2\varpi}{\psi^2}, & \frac{Q}{R} = \frac{\psi^2}{\mathrm{csh}^2\varpi}, & \\ \frac{dlP}{d\psi} = -\frac{2}{\psi}, & \frac{dlQ}{d\varpi} = -2\frac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}, & \frac{dlR}{d\varphi} = 0, & \\ \frac{dlP}{d\varpi} = 0, & \frac{dlQ}{d\varphi} = 0, & \frac{dlR}{d\psi} = -\frac{2}{\psi}, & \\ \frac{dl.QR}{d\varphi} = 0, & \frac{dl\,RP}{d\psi} = -\frac{4}{\psi}, & \frac{dl.PQ}{d\varpi} = -\frac{2\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}. & \end{array} \right.$$

En conséquence de quoi le système d'équations différentielles totales (106) sera, pour le Cas actuel, le suivant

$$(2)\quad \begin{cases} dL = \left(\dfrac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi} M + \dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} N\right).d\varphi - \dfrac{1}{\psi} L.d\psi - \dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} L.d\varpi, \\ dM = -\dfrac{1}{\psi} L.d\varphi - \dfrac{1}{2\psi} M.d\psi - \dfrac{1}{\psi} N.d\varpi, \\ dN = -\dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} L.d\varphi - \dfrac{1}{\psi} N.d\psi + \left(\dfrac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi} M - \dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} N\right).d\varpi, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, sera de nouveau le système (87) du même Chapitre, savoir

$$(3)\quad \begin{cases} dL = L_1 d\varphi + L_2 d\psi + L_3 d\varpi, \\ dM = M_1 d\varphi + M_2 d\psi + M_3 d\varpi, \\ dN = N_1 d\varphi + N_2 d\psi + N_3 d\varpi, \end{cases}$$

étant entendu que les quantités L_1, L_2, ... M_1, ... N_3 y désignent, pour abréger, les expressions suivantes qui représentent semblablement, pour le Cas actuel, celles qui figurent dans les égalités précédentes (86) et (86bis) du même Chapitre,

$$(4)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi} M + \dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} N, & N_2 = M_3 = -\dfrac{1}{\psi} N, \\ M_2 = -\dfrac{1}{2\psi} M, & L_3 = N_1 = -\dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} L, \\ N_3 = \dfrac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi} M - \dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} N, & M_1 = L_2 = -\dfrac{1}{\psi} L. \end{cases}$$

Cela posé, le problème de l'intégration générale du système d'équations différentielles totales (3) étant, comme nous l'avons déjà dit à la même occasion, complètement équivalent à la recherche de l'intégrale générale commune aux trois équations simultanées aux dérivées partielles

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{d\omega}{d\varphi} + L_1 \frac{d\omega}{dL} + M_1 \frac{d\omega}{dM} + N_1 \frac{d\omega}{dN} = 0,\\
B(\omega) &= \frac{d\omega}{d\psi} + L_2 \frac{d\omega}{dL} + M_2 \frac{d\omega}{dM} + N_2 \frac{d\omega}{dN} = 0,\\
C(\omega) &= \frac{d\omega}{d\varpi} + L_3 \frac{d\omega}{dL} + M_3 \frac{d\omega}{dM} + N_3 \frac{d\omega}{dN} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

nous allons résoudre ce dernier problème en appliquant, dans ses traits essentiels, la méthode exposée pour cet objet, à propos de deux équations seulement, dans les *Vorlesungen* de Jacobi (*).

A cet effet, nous observerons tout d'abord que parmi ces trois dernières équations (5), il en est une dont l'intégrale générale peut s'obtenir avec la plus grande facilité, à savoir la seconde, car cette intégrale étant procurée par le système simultané

$$
(6)\qquad \frac{d\psi}{1} = \frac{dL}{L_2} = \frac{dM}{M_2} = \frac{dN}{N_2},
$$

ou, ce qui est la même chose, eu égard aux valeurs (4),

$$
(6^{bis})\qquad \frac{d\psi}{1} = \frac{dL}{-\frac{1}{\psi}L} = \frac{dM}{-\frac{1}{2\psi}M} = \frac{dN}{-\frac{1}{\psi}N},
$$

système équivalent lui-même au suivant

$$
\psi dL + L d\psi = 0, \qquad \psi . 2M dM + M^2 d\psi = 0, \qquad \psi dN + N d\psi = 0,
$$

dont l'intégrale générale est

$$
L\psi = \text{const.}, \qquad M^2\psi = \text{const.}, \qquad N\psi = \text{const.},
$$

on voit qu'en faisant, pour faciliter les calculs qui vont suivre,

$$
(7)\qquad \omega_1 = L\psi, \qquad \omega_2 = M\sqrt{\psi}, \qquad \omega_3 = N\psi,
$$

(*) Vorlesungen über Dynamik, 33e leçon (pp. 257-264).

celle de l'équation en question $B(\omega) = 0$ sera, φ et ϖ étant des constantes relativement à cette équation en particulier,

$$(8) \qquad \omega = F(\varphi, \varpi, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Omega.$$

Partant de là, la recherche d'une solution commune aux trois équations (5) revient évidemment à déterminer la fonction arbitraire F de telle sorte qu'une même expression semblable vérifie à la fois les deux autres équations (5), c'est-à-dire que l'on ait à la fois $A(\Omega) = 0$ et $C(\Omega) = 0$. Or, ces deux équations étant toutes deux linéaires et homogènes, comme en y substituant cette expression Ω (8) à la place de ω l'on aura alors, en vertu d'une formule connue (*),

$$\left\{ \begin{aligned} A(\Omega) &= A(\varphi)\frac{d\Omega}{d\varphi} + A(\varpi)\frac{d\Omega}{d\varpi} + A(\omega_1)\frac{d\Omega}{d\omega_1} + A(\omega_2)\frac{d\Omega}{d\omega_2} + A(\omega_3)\frac{d\Omega}{d\omega_3}, \\ C(\Omega) &= C(\varphi)\frac{d\Omega}{d\varphi} + C(\varpi)\frac{d\Omega}{d\varpi} + C(\omega_1)\frac{d\Omega}{d\omega_1} + C(\omega_2)\frac{d\Omega}{d\omega_2} + C(\omega_3)\frac{d\Omega}{d\omega_3}, \end{aligned} \right.$$

(*) En effet, étant donnée l'expression, linéaire et homogène par rapport aux dérivées du premier ordre de ω,

$$\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{A}_i \frac{d\omega}{dx_i},$$

si l'on y remet à la place de ω la fonction Ω, ou plus exactement ses dérivées définies respectivement par les égalités suivantes :

$$\Omega = F(y_1, y_2, \ldots y_m), \qquad \frac{d\Omega}{dx_i} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{d\Omega}{dy_k}\frac{dy_k}{dx_i},$$

en supposant que les nouvelles variables y sont des fonctions déterminées et connues des précédentes x, il est clair que le résultat de la substitution pourra s'écrire successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{A}_i \left(\sum_{k=1}^{k=m} \frac{d\Omega}{dy_k}\frac{dy_k}{dx_i} \right) &= \sum_{k=1}^{k=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{A}_i \frac{dy_k}{dx_i} \right) \frac{d\Omega}{dy_k} \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} \mathcal{A}(y_k)\frac{d\Omega}{dy_k}, \end{aligned}$$

d'après la définition même qui précède du symbole différentiel $\mathcal{A}$. C'est l'avant-dernière formule de la page 261 des *Vorlesungen.*

égalités dans lesquelles on aura semblablement, d'après les définitions (5) des symboles différentiels A et C, d'abord

$$A(\varphi) = 1, \qquad A(\varpi) = 0, \qquad C(\varphi) = 0, \qquad C(\varpi) = 1,$$

puis, en désignant par ω_i l'une quelconque des expressions (7),

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} A(\omega_i) &= L_1 \frac{d\omega_i}{dL} + M_1 \frac{d\omega_i}{dM} + N_1 \frac{d\omega_i}{dN}, \\ C(\omega_i) &= L_3 \frac{d\omega_i}{dL} + M_3 \frac{d\omega_i}{dM} + N_3 \frac{d\omega_i}{dN}, \end{aligned} \right.$$

il est clair alors que si l'on désigne d'une façon générale par A_i et C_i ce que deviendront respectivement ces coefficients $A(\omega_i)$ et $C(\omega_i)$ lorsqu'on les aura exprimés, par le moyen des trois équations (7), à l'aide des variables φ, ψ, ϖ, ω_1, ω_2, ω_3, à la place des variables φ, ψ, ϖ, L, M, N, il est clair, disons-nous, que le problème se réduira simplement à trouver la solution la plus générale commune aux deux seules équations aux dérivées partielles

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega) &= \frac{d\Omega}{d\varphi} + A_1 \frac{d\Omega}{d\omega_1} + A_2 \frac{d\Omega}{d\omega_2} + A_3 \frac{d\Omega}{d\omega_3} = 0, \\ \mathcal{C}(\Omega) &= \frac{d\Omega}{d\varpi} + C_1 \frac{d\Omega}{d\omega_1} + C_2 \frac{d\Omega}{d\omega_2} + C_3 \frac{d\Omega}{d\omega_3} = 0, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les variables indépendantes sont maintenant φ, ϖ, ω_1, ω_2, ω_3, la variable ψ devant y être considérée comme une constante, et la fonction inconnue étant d'autre part Ω.

Pour cela, calculant tout d'abord les coefficients A_i et C_i à l'aide des expressions (9), (4), et (7), on trouvera

$$
(11)\quad
\begin{cases}
A_1 = A(\omega_1) = L_1 \dfrac{d\omega_1}{dL} + M_1 \dfrac{d\omega_1}{dM} + N_1 \dfrac{d\omega_1}{dN} = L_1\psi \\[2mm]
\quad = \left(\dfrac{\psi}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} M + \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} N\right).\psi = \dfrac{\psi^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}\psi^{\frac{1}{2}}M + \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} N\psi \\[2mm]
\quad = \dfrac{\psi^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}\omega_2 + \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\omega_3, \\[4mm]
A_2 = A(\omega_2) = L_1 \dfrac{d\omega_2}{dL} + M_1 \dfrac{d\omega_2}{dM} + N_1 \dfrac{d\omega_2}{dN} = M_1\sqrt{\psi} \\[2mm]
\quad = -\dfrac{1}{\psi} L.\sqrt{\psi} = -\dfrac{1}{\psi\sqrt{\psi}}.L\psi = -\psi^{-\frac{5}{2}}\omega_1, \\[4mm]
A_3 = A(\omega_3) = L_1 \dfrac{d\omega_3}{dL} + M_1 \dfrac{d\omega_3}{dM} + N_1 \dfrac{d\omega_3}{dN} = N_1\psi \\[2mm]
\quad = -\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} L.\psi = -\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\omega_1,
\end{cases}
$$

$$
(12)\quad
\begin{cases}
C_1 = C(\omega_1) = L_3 \dfrac{d\omega_1}{dL} + M_3 \dfrac{d\omega_1}{dM} + N_3 \dfrac{d\omega_1}{dN} = L_3\psi \\[2mm]
\quad = -\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} L.\psi = -\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\omega_1, \\[4mm]
C_2 = C(\omega_2) = L_3 \dfrac{d\omega_2}{dL} + M_3 \dfrac{d\omega_2}{dM} + N_3 \dfrac{d\omega_2}{dN} = M_3\sqrt{\psi} \\[2mm]
\quad = -\dfrac{1}{\psi} N.\sqrt{\psi} = -\dfrac{1}{\psi\sqrt{\psi}}.N\psi = -\psi^{-\frac{5}{2}}\omega_3, \\[4mm]
C_3 = C(\omega_3) = L_3 \dfrac{d\omega_3}{dL} + M_3 \dfrac{d\omega_3}{dM} + N_3 \dfrac{d\omega_3}{dN} = N_3\psi \\[2mm]
\quad = \left(\dfrac{\psi}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} M - \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} N\right).\psi \\[2mm]
\quad = \dfrac{\psi^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}\psi^{\frac{1}{2}}M - \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi} N\psi = \dfrac{\psi^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}\omega_2 - \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\omega_3;
\end{cases}
$$

et ces valeurs obtenues, l'intégrale générale de la première des deux équations (10), par exemple, étant fournie par le système simultané,

$$(13)\qquad \frac{d\varphi}{1} = \frac{d\omega_1}{A_1} = \frac{d\omega_2}{A_2} = \frac{d\omega_3}{A_3},$$

si l'on représente par

$$\Omega'_1 = \text{const.}, \qquad \Omega'_2 = \text{const.}, \qquad \Omega'_3 = \text{const.},$$

le système intégral correspondant, l'intégrale générale de cette première équation (10) sera

$$(14)\qquad \Omega = F_1(\varpi, \Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3).$$

Or, d'après la méthode indiquée par Jacobi, l'on peut espérer, en s'aidant de la seconde équation (10), obtenir successivement ces trois intégrales différentes $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$, en calculant directement l'une d'entre elles seulement (*), par l'intégration d'une seule des équations du système (13). Dans cette pensée, considérant celle qui résulte de l'égalité des deux derniers rapports, et qui est évidemment la plus simple, savoir

$$\frac{d\omega_2}{A_2} = \frac{d\omega_3}{A_3},$$

c'est-à-dire, eu égard aux valeurs précédentes (11),

$$(15)\qquad \frac{d\omega_2}{-\psi^{-\frac{3}{2}}\omega_1} = \frac{d\omega_3}{-\dfrac{\text{snh}\,\varpi}{\text{csh}\,\varpi}\omega_1},$$

ou, ce qui est la même chose, en chassant les dénominateurs,

$$\psi^{\frac{3}{2}}\,\text{snh}\,\varpi . d\omega_2 = \text{csh}\,\varpi . d\omega_3,$$

(*) VORLESUNGEN (*loc. cit.*), p. 260.

laquelle fournit immédiatement l'intégrale

$$\Omega'_1 = \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{snh} \varpi . \omega_2 - \operatorname{csh} \varpi \; \omega_3, \tag{16}$$

nous savons, d'après la théorie précitée de Jacobi, que $\Theta(\Omega'_1)$ et $\Theta^2(\Omega'_1) = \Theta\,[\Theta(\Omega'_1)]$ seront encore deux solutions de cette même équation (10), et, par conséquent, si elles sont effectivement distinctes de la première, on pourra les prendre respectivement pour Ω'_2 et Ω'_3, et s'en servir dès lors pour former l'intégrale générale (14).

Calculant donc à cet effet, comme tout à l'heure, les deux quantités en question, on trouvera semblablement, pour la première tout d'abord, eu égard à la définition (10) du symbole différentiel Θ, ainsi qu'aux valeurs (12) des coefficients C, et à celle (16) de Ω'_1 :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(\Omega'_1) &= \frac{d\Omega'_1}{d\varpi} + C_1 \frac{d\Omega'_1}{d\omega_1} + C_2 \frac{d\Omega'_1}{d\omega_2} + C_3 \frac{d\Omega'_1}{d\omega_3} \\ &= \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{csh} \varpi . \omega_2 - \operatorname{snh} \varpi . \omega_3 + C_2 . \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{snh} \varpi - C_3 . \operatorname{csh} \varpi \\ &= \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{csh} \varpi . \omega_2 - \operatorname{snh} \varpi . \omega_3 - \psi^{-\frac{5}{2}} \omega_3 . \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{snh} \varpi \\ &\qquad - \left(\frac{\psi^{\frac{5}{2}}}{\operatorname{csh}^2 \varpi} \omega_2 - \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi} \omega_3 \right) . \operatorname{csh} \varpi \\ &= \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{csh} \varpi . \omega_2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{csh}^2 \varpi} \right) - \operatorname{snh} \varpi . \omega_3 \\ &= \psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{csh} \varpi \; \omega_2 \frac{\operatorname{snh}^2 \varpi}{\operatorname{csh}^2 \varpi} - \operatorname{snh} \varpi . \omega_3 \\ &= \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi} \left(\psi^{\frac{5}{2}} \operatorname{snh} \varpi . \omega_2 - \operatorname{csh} \varpi . \omega_3 \right) = \operatorname{tgh} \varpi . \Omega'_1 . \end{aligned} \right.$$

Cette dernière valeur montrant que ladite quantité $\Theta(\Omega'_1)$ ne constitue pas une intégrale distincte de Ω'_1 [la variable ϖ étant une constante relativement à cette première équation (10), ou, ce qui est la même chose, au système simultané (13)], fait voir par là même que l'on ne pourra obtenir, d'après ce seul procédé, les

deux autres intégrales Ω'_2 et Ω'_3, en partant de cette première Ω'_1; mais elle nous apprend en même temps qu'il sera possible de satisfaire à la fois aux deux équations (10) par une expression de la forme $\Omega = \mathcal{F}_1(\varpi, \Omega'_1)$ (*), laquelle étant comprise dans le type (14) satisfait déjà à la première de ces deux équations. Car la substitution de cette dernière valeur dans la seconde de ces mêmes équations donnant pour résultat, en vertu de la formule déjà rappelée (voir la note de la page 106), et en ayant égard à la valeur $\mathcal{C}(\varpi) = 1$ qui résulte immédiatement de la définition (10) du symbole différentiel $\mathcal{C}$, ainsi qu'à la valeur précédente (17) de $\mathcal{C}(\Omega'_1)$,

$$\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}(\varpi)\frac{d\Omega}{d\varpi} + \mathcal{C}(\Omega'_1)\frac{d\Omega}{d\Omega'_1} = \frac{d\Omega}{d\varpi} + \operatorname{tgh}\varpi\,\Omega'_1.\frac{d\Omega}{d\Omega'_1},$$

on voit que l'équation $\mathcal{C}(\Omega) = 0$, étant ainsi calculée, ne sera autre chose que la nouvelle équation aux dérivées partielles entre l'inconnue Ω et les variables indépendantes ϖ et Ω'_1, savoir (**)

$$\frac{d\Omega}{d\varpi} + \operatorname{tgh}\varpi\,\Omega'_1.\frac{d\Omega}{d\Omega'_1} = 0,$$

dont une intégrale, fournie par l'équation

$$(18)\qquad \frac{d\varpi}{1} = \frac{d\Omega'_1}{\operatorname{tgh}\varpi\,\Omega'_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\Omega'_1}{\Omega'_1} - \frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}d\varpi = 0,$$

sera, par conséquent,

$$l\Omega'_1 - l\operatorname{csh}\varpi = l\gamma \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \frac{\Omega'_1}{\operatorname{csh}\varpi};$$

et dès lors cette dernière intégrale, étant exprimée de nouveau

---

(*) VORLESUNGEN (*loc. cit.*), page 262, 1, première phrase.

(**) Cette équation représente, pour la question actuelle, l'équation inscrite en haut de la page 262 des *Vorlesungen*.

en ω_1, ω_2, et ω_3, en y remettant la valeur (16) de Ω'_1, savoir

$$(19) \qquad \gamma = \frac{1}{\operatorname{csh} \varpi}\left(\psi^{\frac{3}{2}} \operatorname{snh} \varpi . \omega_2 - \operatorname{csh} \varpi . \omega_3\right) = \psi^{\frac{3}{2}} \operatorname{tgh} \varpi \ \omega_2 - \omega_3,$$

sera donc une solution commune aux deux équations (10).

Pour en trouver deux autres, nous pourrions appliquer de nouveau le même procédé, en partant de la seconde intégrale Ω'_2 de la première équation (10), que fournirait assez facilement encore, en s'aidant de la première Ω'_1 (16), l'équation du système (13) qui résulterait de l'égalité des deuxième et troisième rapports; mais le calcul sera plus simple et plus aisé en abandonnant cette première équation (10), et reprenant les mêmes procédés à l'égard de la seconde, dont l'intégrale générale, étant fournie par le système simultané

$$(20) \qquad \frac{d\varpi}{1} = \frac{d\omega_1}{C_1} = \frac{d\omega_2}{C_2} = \frac{d\omega_3}{C_3},$$

consistera, par conséquent, dans une équation de la forme

$$(21) \qquad \Omega = F_2(\varphi, \Omega''_1, \Omega''_2, \Omega''_3),$$

en représentant semblablement par les trois équations

$$\Omega''_1 = \text{const.}, \qquad \Omega''_2 = \text{const.}, \qquad \Omega''_3 = \text{const.},$$

le système intégral du système différentiel précédent (20). Or, la première équation de ce système, savoir

$$(22) \qquad d\omega_1 = C_1 d\varpi \qquad \text{ou} \qquad d\omega_1 = -\frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}\omega_1 . d\varpi,$$

eu égard à la valeur (12) de C_1, pouvant être écrite

$$\operatorname{csh} \varpi . d\omega_1 + \omega_1 . \operatorname{snh} \varpi \, d\varpi = 0 \qquad \text{ou} \qquad d(\omega_1 \operatorname{csh} \varpi) = 0,$$

fournit immédiatement la première intégrale

$$(23) \qquad \Omega''_1 = \omega_1 \operatorname{csh} \varpi,$$

et dès lors, toujours d'après le théorème de Jacobi, $\mathcal{A}(\Omega_1'')$ et $\mathcal{A}^2(\Omega_1'')$ seront deux nouvelles solutions de la même équation $\mathcal{E}(\Omega) = 0$.

Calculant donc encore ces expressions, à l'aide de la définition (10) du symbole $\mathcal{A}$, de cette valeur (23), et des valeurs (11) des coefficients A, on trouvera, comme tout à l'heure, pour la première tout d'abord,

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega_1'') &= \frac{d\Omega_1''}{d\varphi} + A_1 \frac{d\Omega_1''}{d\omega_1} + A_2 \frac{d\Omega_1''}{d\omega_2} + A_3 \frac{d\Omega_1''}{d\omega_3} = A_1 . \mathrm{csh}\, \varpi \\ &= \left(\frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{csh}^2 \varpi}\, \omega_2 + \frac{\mathrm{snh}\, \varpi}{\mathrm{csh}\, \varpi}\, \omega_3 \right) \mathrm{csh}\, \varpi = \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{csh}\, \varpi} . \omega_2 + \mathrm{snh}\, \varpi . \omega_3 . \end{aligned} \right.$$

Cette valeur étant bien distincte de l'intégrale précédente Ω_1'' (23), nous la prendrons, en conséquence, pour l'intégrale Ω_2'', auquel cas ayant alors à la fois

$$(25)\qquad \Omega_2'' = \mathcal{A}(\Omega_1''), \qquad \mathcal{A}^2(\Omega_1'') = \mathcal{A}\left[\mathcal{A}(\Omega_1'')\right] = \mathcal{A}(\Omega_2''),$$

la valeur de la seconde de ces quantités se calculera par suite exactement de la même façon, ainsi qu'il suit :

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega_2'') &= \frac{d\Omega_2''}{d\varphi} + A_1 \frac{d\Omega_2''}{d\omega_1} + A_2 \frac{d\Omega_2''}{d\omega_2} + A_3 \frac{d\Omega_2''}{d\omega_3} \\ &= A_2 . \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{csh}\, \varpi} + A_3 . \mathrm{snh}\, \varpi = -\psi^{-\frac{3}{2}} \omega_1 . \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{csh}\, \varpi} - \frac{\mathrm{snh}\, \varpi}{\mathrm{csh}\, \varpi} \omega_1 . \mathrm{snh}\, \varpi \\ &= -\frac{\omega_1}{\mathrm{csh}\, \varpi} (1 + \mathrm{snh}^2 \varpi) = -\omega_1 \mathrm{csh}\, \varpi = -\Omega_1'' . \end{aligned} \right.$$

Cette dernière valeur fait voir de nouveau que cette seconde quantité $\mathcal{A}^2(\Omega_1'') = \mathcal{A}(\Omega_2'')$ ne constitue pas une intégrale distincte de l'intégrale Ω_1'', d'où nous étions parti tout à l'heure, et qu'elle ne suffira pas, par conséquent, conjointement avec Ω_1'' et Ω_2'', pour pouvoir former l'intégrale générale (21) ; mais elle nous montre en même temps que l'on pourra satisfaire simultanément aux deux équations (10) à l'aide d'une expression de la

forme $\Omega = \mathcal{F}_2(\varphi, \Omega_1'', \Omega_2'')$, laquelle étant comprise dans le type (21) satisfait déjà à la seconde de ces équations. En effet, la substitution d'une semblable expression dans la première de ces mêmes équations donnera encore pour résultat, toujours en vertu de la même formule connue, et eu égard à l'hypothèse (25),

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\varphi)\frac{d\Omega}{d\varphi} + \mathcal{A}(\Omega_1'')\frac{d\Omega}{d\Omega_1''} + \mathcal{A}(\Omega_2'')\frac{d\Omega}{d\Omega_2''}$$

$$= \mathcal{A}(\varphi)\frac{d\Omega}{d\varphi} + \Omega_2''\frac{d\Omega}{d\Omega_1''} + \mathcal{A}(\Omega_2'')\frac{d\Omega}{d\Omega_2''};$$

et dès lors, si l'on tient compte de la valeur $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ qui résulte immédiatement de la définition (10) du symbole $\mathcal{A}$, et aussi de la valeur (26) obtenue tout à l'heure pour $\mathcal{A}(\Omega_2'')$, on voit que la première équation (10), savoir $\mathcal{A}(\Omega) = 0$, se réduira de même à la nouvelle équation aux dérivées partielles entre la fonction inconnue Ω et les variables indépendantes φ, Ω_1'', et Ω_2'',

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} + \Omega_2''\frac{d\Omega}{d\Omega_1''} - \Omega_1''\frac{d\Omega}{d\Omega_2''} = 0, \quad (^*)$$

dont l'intégration dépend du système

$$(27) \qquad \frac{d\varphi}{1} = \frac{d\Omega_1''}{\Omega_2''} = \frac{d\Omega_2''}{-\Omega_1''},$$

ou, ce qui est la même chose, des deux équations simultanées

$$\Omega_1''d\Omega_1'' + \Omega_2''d\Omega_2'' = 0, \qquad d\varphi - \frac{d\Omega_1''}{\Omega_2''} = 0.$$

Or, la première s'intégrant immédiatement comme il suit

$$(28) \qquad \alpha^2 = \Omega_1''^2 + \Omega_2''^2 \qquad \text{ou} \qquad \Omega_2'' = \pm\sqrt{\alpha^2 - \Omega_1''^2},$$

(*) Voir la seconde note de la page 111.

la seconde, qui devient alors

$$d\varphi \pm \frac{-d\Omega_1''}{\sqrt{\alpha^2 - \Omega_1''^2}} = 0,$$

donnera également par l'intégration

$$(29) \qquad 6 = \varphi \pm \arccos \frac{\Omega_1''}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad \mp \arccos \frac{\Omega_1''}{\alpha} = \varphi - 6,$$

ou, en prenant les cosinus des deux membres, et revenant à la valeur (28) de Ω_2'',

$$(30) \qquad \Omega_1'' = \alpha \cos(\varphi - 6), \qquad \Omega_2'' = \pm \alpha \sin(\varphi - 6).$$

Les deux expressions (28) et (29) de α^2 et 6, étant alors exprimées en ω_1, ω_2, et ω_3, en y remplaçant Ω_1'' et Ω_2'' par leurs valeurs (23) et (25) - (24), et qui deviendront par là

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \omega_1^2 \operatorname{csh}^2 \varpi + \left(\frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{csh} \varpi} . \omega_2 + \operatorname{snh} \varpi . \omega_3 \right)^2, \\ 6 &= \varphi \pm \arccos \frac{\omega_1 \operatorname{csh} \varpi}{\sqrt{\omega_1^2 \operatorname{csh}^2 \varpi + \left(\frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{csh} \varpi} . \omega_2 + \operatorname{snh} \varpi \; \omega_3 \right)^2}}, \end{aligned} \right.$$

seront donc ainsi les deux autres solutions demandées, communes aux deux équations (10).

Ainsi donc, en résumé, les trois expressions (19) et (31) sont trois solutions communes aux deux équations (10), qui fourniront la solution la plus générale commune à ces deux équations sous la forme

$$(32) \qquad \Omega = \mathcal{F}(\alpha, 6, \gamma),$$

la fonction $\mathcal{F}$ demeurant arbitraire. Mais comme ces trois solutions, d'après la manière dont elles ont été calculées, sont déduites originairement de l'expression (8), il s'ensuit donc qu'étant

exprimées de nouveau en L, M, N, au lieu de ω_1, ω_2, ω_3, par le moyen des équations (7), elles satisferont encore chacune à la seconde équation (5), savoir $B(\omega)=0$, et, par conséquent, après cette dernière opération qui les transformera dans les trois suivantes

$$(33)\quad \begin{cases} \alpha^2 = L^2\psi^2.\,\mathrm{csh}^2\,\varpi + \psi^2\left(\dfrac{\psi}{\mathrm{csh}\,\varpi}.\,M + \mathrm{snh}\,\varpi.\,N\right)^2 \\ 6 = \varphi \pm \arccos \dfrac{L\,\mathrm{csh}\,\varpi}{\sqrt{L^2\,\mathrm{csh}^2\,\varpi + \left(\dfrac{\psi}{\mathrm{csh}\,\varpi}.M + \mathrm{snh}\,\varpi\ N\right)^2}} \\ \gamma = \psi\,(\psi\,\mathrm{tgh}\,\varpi.M - N), \end{cases}$$

l'expression $\omega = \Omega$, Ω étant la valeur fournie par la formule (32) où α, 6, γ sont maintenant les valeurs données par les trois égalités que nous venons d'écrire, représentera définitivement la solution la plus générale commune aux trois équations proposées (5).

En même temps le calcul qui précède nous fait voir (et c'est, à proprement parler, cette seconde forme seule du résultat qui nous intéresse dans la question actuelle) que si, dans les trois mêmes équations (33), l'on considère α, 6, γ comme des constantes, chacune d'elles sera encore une solution du système d'équations différentielles totales (3), et, par conséquent, l'ensemble de ces trois équations constituera, dans cette hypothèse, l'intégrale générale dudit système (3) ou (2). Car, d'après les propriétés connues des équations aux dérivées partielles du premier ordre, chacune d'elles satisfera alors, non seulement au système simultané (6), dans lequel ϖ et φ sont des constantes, mais encore aux deux autres systèmes analogues

$$\frac{d\varphi}{1} = \frac{dL}{L_1} = \frac{dM}{M_1} = \frac{dN}{N_1}, \qquad \frac{d\varpi}{1} = \frac{dL}{L_3} = \frac{dM}{M_3} = \frac{dN}{N_3},$$

dans lesquels ψ et ϖ sont de même des constantes pour le premier, et φ et ψ pour le second. Or l'ensemble de ces trois systèmes équi-

vaut évidemment, dans ces conditions, aux neuf équations (86) de notre Chapitre V, lesquelles, suivant que nous l'avons fait observer alors, n'expriment qu'une seule et même chose avec le système d'équations différentielles totales (87) ou (3) de la présente Note.

D'ailleurs, pour obtenir alors ce même système intégral résolu, comme c'est évidemment le but final, par rapport aux inconnues L, M, N, et non plus, comme dans les formules en question, par rapport aux constantes α, β, γ, il suffira d'observer qu'en remettant dans les expressions (23) de Ω_1'', et (25)-(24) de Ω_2'', à la place de ω_1, ω_2, ω_3, leurs valeurs de définition (7), celles-ci deviendront

$$\Omega_1'' = \mathrm{L}\psi.\mathrm{csh}\,\varpi, \qquad \Omega_2'' = \frac{\psi^2}{\mathrm{csh}\,\varpi}\cdot \mathrm{M} + \mathrm{snh}\,\varpi.\mathrm{N}\psi,$$

et qu'en reportant dès lors ces deux dernières expressions dans les deux équations (30), et leur adjoignant enfin la troisième équation (33), on aura le système linéaire en L, M, N :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi.\mathrm{L} = \alpha\cos(\varphi-\beta),\\ &\psi\left(\frac{\psi}{\mathrm{csh}\,\varpi}.\mathrm{M} + \mathrm{snh}\,\varpi.\mathrm{N}\right) = \pm\,\alpha\sin(\varphi-\beta),\\ &\psi\,(\psi\,\mathrm{tgh}\,\varpi.\mathrm{M} - \mathrm{N}) = \gamma.\end{aligned}\right.$$

Or, les deux dernières pouvant être écrites, en les divisant par ψ, et y prenant pour inconnues les deux quantités $\frac{\psi\mathrm{M}}{\mathrm{csh}\,\varpi}$ et N,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\psi\mathrm{M}}{\mathrm{csh}\,\varpi} + \mathrm{snh}\,\varpi.\mathrm{N} = \pm\frac{\alpha}{\psi}\sin(\varphi-\beta)\\ &\mathrm{snh}\,\varpi.\frac{\psi\mathrm{M}}{\mathrm{csh}\,\varpi} \qquad - \mathrm{N} = \frac{\gamma}{\psi},\end{aligned}\right.$$

donnent dès lors, en éliminant successivement chaque inconnue,

$$\left\{\begin{aligned} &(1+\mathrm{snh}^2\varpi)\frac{\psi\mathrm{M}}{\mathrm{csh}\,\varpi} = \pm\frac{\alpha}{\psi}\sin(\varphi-\beta) + \frac{\gamma}{\psi}\mathrm{snh}\,\varpi,\\ &(1+\mathrm{snh}^2\varpi)\,\mathrm{N} \qquad = \pm\frac{\alpha}{\psi}\sin(\varphi-\beta).\mathrm{snh}\,\varpi - \frac{\gamma}{\psi},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera définitivement, en résolvant chacune de ces deux dernières équations, ainsi que la première (34), par rapport à L, M, N, les valeurs demandées :

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\alpha \cos(\varphi - 6)}{\psi \operatorname{csh} \varpi}, \qquad M = \frac{\pm\, \alpha \sin(\varphi - 6) + \gamma \operatorname{snh} \varpi}{\psi^2 \operatorname{csh} \varpi}, \\ N &= \frac{\pm\, \alpha \sin(\varphi - 6) \operatorname{snh} \varpi - \gamma}{\psi \operatorname{csh}^2 \varpi}. \end{aligned} \right.$$

Des deux conditions énoncées dans la théorie générale de notre Chapitre V comme nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une solution (pp. 343-344), la première, à savoir que le système d'équations différentielles totales (87) ou (3) de cette Note soit complètement intégrable, est donc déjà remplie, et les valeurs précédentes de L, M, N représentent dès lors les expressions (89) de cette théorie générale.

Cela posé, suivant ce que nous avons dit alors, nous sommes assurés par là dès maintenant que la différentielle totale

$$(36)\qquad du = L d\varphi + M d\psi + N d\varpi$$

sera également intégrable avec lesdites valeurs de L, M, N. Et, en effet, si l'on rejette le signe + dans les doubles signes qui figurent aux expressions (35) de M et N, en ne gardant donc que le signe —, l'on constate aisément que ces mêmes valeurs (35) peuvent être écrites

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\alpha \cos(\varphi - 6)}{\psi \operatorname{csh} \varpi} = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\psi}\left(\frac{\alpha \sin(\varphi - 6)}{\operatorname{csh} \varpi} - \gamma \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}\right)\right], \\ M &= -\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\alpha \sin(\varphi - 6)}{\operatorname{csh} \varpi} - \gamma \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left[\frac{1}{\psi}\left(\alpha \frac{\sin(\varphi - 6)}{\operatorname{csh} \varpi} - \gamma \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}\right)\right], \\ N &= \frac{1}{\psi}\left(\alpha \sin(\varphi - 6) \frac{-\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh}^2 \varpi} - \gamma \frac{\operatorname{csh}^2 \varpi - \operatorname{snh}^2 \varpi}{\operatorname{csh}^2 \varpi}\right) = \frac{d}{d\varpi}\left[\frac{1}{\psi}\left(\alpha \frac{\sin(\varphi - 6)}{\operatorname{csh} \varpi} - \gamma \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, l'expression de u sera fournie définitivement

par la quadrature de cette différentielle totale (36) sous la forme :

$$(38)\qquad u = u_0 + \frac{1}{\psi}\left(\alpha\,\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\operatorname{csh}\varpi} - \gamma\,\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\right).$$

Enfin, si conformément au système de notation adopté dans l'exposé de cette théorie, nous supposons les mêmes expressions (37) et (38) récrites trois fois, avec une accentuation différente à chaque fois, la seconde des deux conditions précitées, à savoir celle exprimée par les six équations (107), se traduira, dans le cas actuel, par six équations, dont nous n'écrirons qu'une seule pour chaque groupe, soit de gauche, soit de droite, puisqu'elles se déduiront les unes des autres dans chaque groupe, en permutant simplement l'accentuation, et qui seront dès lors représentées par les deux suivantes, correspondant, eu égard aux valeurs (1) de P, Q, R dans la question, à celles de la première ligne desdites équations (107), savoir

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\psi^2}\,\frac{\alpha'^2\cos^2(\varphi - \theta')}{\psi^2\operatorname{csh}^2\varpi} + \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\,\frac{[-\alpha'\sin(\varphi - \theta) + \gamma'\operatorname{snh}\varpi]^2}{\psi^4\operatorname{csh}^2\varpi}\\
&\qquad + \frac{1}{\psi^2}\,\frac{[-\alpha'\sin(\varphi - \theta')\operatorname{snh}\varpi - \gamma']^2}{\psi^2\operatorname{csh}^4\varpi} = \frac{1}{\psi^4\operatorname{csh}^2\varpi},\\
&\frac{1}{\psi^2}\,\frac{\alpha''\cos(\varphi - \theta'').\alpha'''\cos(\varphi - \theta''')}{\psi^2\operatorname{csh}^2\varpi}\\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\,\frac{[-\alpha''\sin(\varphi - \theta'') + \gamma''\operatorname{snh}\varpi].[-\alpha'''\sin(\varphi - \theta''') + \gamma'''\operatorname{snh}\varpi]}{\psi^4\operatorname{csh}^2\varpi}\\
&\quad + \frac{1}{\psi^2}\,\frac{[-\alpha''\sin(\varphi - \theta'')\operatorname{snh}\varpi - \gamma''].[-\alpha'''\sin(\varphi - \theta''')\operatorname{snh}\varpi - \gamma''']}{\psi^2\operatorname{csh}^4\varpi} = 0,
\end{aligned}\right.$$

équations que nous transformerons toutes deux *parallèlement*, à l'aide des mêmes opérations, ainsi qu'il suit.

D'abord, les multipliant par $\psi^4\operatorname{csh}^4\varpi$ pour chasser les dénominateurs, et développant en même temps les carrés ou produits,

nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{csh}^2\varpi.\alpha'^2\cos^2(\varphi-6') + [\alpha'^2\sin^2(\varphi-6') - 2\alpha'\sin(\varphi-6')\cdot\gamma'\,\mathrm{snh}\,\varpi + \gamma'^2\mathrm{snh}^2\varpi] \\
&\qquad + [\alpha'^2\sin^2(\varphi-6')\mathrm{snh}^2\varpi + 2\alpha'\sin(\varphi-6')\mathrm{snh}\,\varpi.\gamma' + \gamma'^2] = \mathrm{csh}^2\varpi, \\
&\mathrm{csh}^2\varpi.\alpha''\cos(\varphi-6'').\alpha'''\cos(\varphi-6''') \\
&+ [\alpha''\sin(\varphi-6'').\alpha'''\sin(\varphi-6''') - \alpha''\sin(\varphi-6'').\gamma'''\,\mathrm{snh}\,\varpi \\
&\qquad - \alpha'''\sin(\varphi-6''').\gamma''\mathrm{snh}\,\varpi + \gamma''\mathrm{snh}\,\varpi.\gamma'''\,\mathrm{snh}\,\varpi] \\
&+ [\alpha''\sin(\varphi-6'')\mathrm{snh}\,\varpi.\alpha'''\sin(\varphi-6''')\mathrm{snh}\,\varpi + \alpha''\sin(\varphi-6'')\mathrm{snh}\,\varpi.\gamma''' \\
&\qquad + \alpha'''\sin(\varphi-6''')\mathrm{snh}\,\varpi.\gamma'' + \gamma''\gamma'''] = 0,
\end{aligned}\right.$$

ou, en réduisant,

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{csh}^2\varpi.\alpha'^2\cos^2(\varphi-6') + \alpha'^2\sin^2(\varphi-6').(1+\mathrm{snh}^2\varpi) + \gamma'^2(\mathrm{snh}^2\varpi+1) = \mathrm{csh}^2\varpi, \\
&\mathrm{csh}^2\varpi.\alpha''\cos(\varphi-6'').\alpha'''\cos(\varphi-6''') + \alpha''\sin(\varphi-6'').\alpha'''\sin(\varphi-6''').(1+\mathrm{snh}^2\varpi) \\
&\qquad + \gamma''\gamma'''(\mathrm{snh}^2\varpi+1) = 0,
\end{aligned}\right.$$

ou encore, en supprimant le facteur $\mathrm{csh}^2\varpi = 1 + \mathrm{snh}^2\varpi$, et rapprochant les termes semblables,

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha'^2[\cos^2(\varphi-6') + \sin^2(\varphi-6')] + \gamma'^2 = 1, \\
&\alpha''\alpha'''[\cos(\varphi-6'')\cos(\varphi-6''') + \sin(\varphi-6'')\sin(\varphi-6''')] + \gamma''\gamma''' = 0,
\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire simplement les deux premières des six relations

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}
&\alpha'^2 + \gamma'^2 = 1, &\quad& \alpha''\alpha'''\cos(6''-6''') + \gamma''\gamma''' = 0, \\
&\alpha''^2 + \gamma''^2 = 1, && \alpha'''\alpha'\cos(6'''-6') + \gamma'''\gamma' = 0, \\
&\alpha'''^2 + \gamma'''^2 = 1, && \alpha'\alpha''\cos(6'-6'') + \gamma'\gamma'' = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui sont donc ce que deviennent, après tranformation, les six équations (107) de notre Chapitre V; et, par conséquent, la seconde des conditions ci-dessus rappelées, consistant en ce que ces six équations doivent se réduire à de simples relations entre les constantes, se trouve donc, dans la question actuelle, également remplie.

D'ailleurs, pour interpréter ces six relations, il suffira de prendre de nouvelles constantes, A, B, C à la place de α, β, γ, en faisant pour chaque coordonnée u,

$$A = -\alpha \sin \beta, \qquad B = \alpha \cos \beta, \qquad C = -\gamma,$$

et alors, d'une part, les six relations auxquelles nous venons d'être conduit se transformant dans les suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1, & A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0, \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1, & A'''A' + B'''B' + C'''C' = 0, \\ A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = 1, & A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0, \end{array}\right.$$

permettront d'interpréter, de même que pour le Cas général, les neuf constantes d'intégration A, B, C comme les cosinus propres à définir un nouveau système d'axes rectilignes X, Y, Z ; et d'autre part l'expression ci-dessus obtenue pour u (38) devenant en même temps, avec ces nouvelles constantes,

$$u = u_0 + A \frac{\cos \varphi}{\psi \operatorname{csh} \varpi} + B \frac{\sin \varphi}{\psi \operatorname{csh} \varpi} + C \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\psi \operatorname{csh} \varpi},$$

permettra semblablement de représenter la solution définitive du problème par le système des six équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} x = x_0 + A'X + B'Y + C'Z, & X = \dfrac{1}{\psi} \dfrac{\cos \varphi}{\operatorname{csh} \varpi}, \\ y = y_0 + A''X + B''Y + C''Z, & Y = \dfrac{1}{\psi} \dfrac{\sin \varphi}{\operatorname{csh} \varpi}, \\ z = z_0 + A'''X + B'''Y + C'''Z, & Z = \dfrac{1}{\psi} \dfrac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi}, \end{array}\right.$$

ce qui établit dès lors de nouveau, en tenant compte de la signification extensive dont nous sommes convenus pour les symboles φ, ψ, ϖ au commencement de cette Note, la coïncidence exacte de cette solution, quant au fond (c'est-à-dire sauf le choix des

axes coordonnés qui demeure arbitraire) avec celle (127) déjà obtenue par un procédé plus simple et plus rapide au cours de notre Chapitre III.

II

(IIᵉ Méthode : *Forme définitive, ou pratique.*) — Nous proposant comme programme, cette fois, l'application de la règle par laquelle nous avons formulé cette méthode dans la Note précédente (page 74), le point de départ de nos calculs sera encore les mêmes expressions (1) de P, Q, R, que tout à l'heure, savoir

$$(40)\qquad P = \frac{1}{\psi^2}, \qquad Q = \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}, \qquad R = \frac{1}{\psi^2},$$

et reportant alors ces valeurs dans les deux équations

$$(41)\qquad P\left(\frac{u}{\varphi}\right)^2 + Q\left(\frac{u}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2 = 1,$$

$$(42)\qquad P\,\frac{u}{\varphi}\,\frac{v}{\varphi} + Q\,\frac{u}{\psi}\,\frac{v}{\psi} + R\,\frac{u}{\varpi}\,\frac{v}{\varpi} = 0,$$

qui représentent de nouveau, comme au début du Chapitre V, sous forme synthétique, les six équations (20) du Chapitre III, ce système sera par conséquent, dans le Cas actuel, figuré par les deux équations

$$\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{du}{d\varpi}\right)^2 = \frac{1}{\psi^4\operatorname{csh}^2\varpi},$$

$$\frac{1}{\psi^2}\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi} + \frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\psi} + \frac{1}{\psi^2}\frac{du}{d\varpi}\frac{dv}{d\varpi} = 0,$$

ou, en multipliant par $\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi$,

$$(43)\qquad \operatorname{csh}^2\varpi\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\varpi}\right)^2\right] + \psi^2\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2 - \frac{1}{\psi^2} = 0,$$

$$(44)\qquad \operatorname{csh}^2\varpi\left[\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi} + \frac{du}{d\varpi}\frac{dv}{d\varpi}\right] + \psi^2\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\psi} = 0.$$

Cela posé, les quatre opérations successives, spécifiées dans la règle mentionnée tout à l'heure, conduiront alors aux calculs suivants.

1° Introduisant encore, par addition et soustraction, deux constantes indéterminées U et V dans l'équation aux dérivées partielles (43), en l'écrivant de la façon suivante

$$(45) \quad \mathrm{csh}^2\varpi\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \mathrm{U}^2\right] + \left[\mathrm{csh}^2\varpi\left\{\mathrm{U}^2 + \left(\frac{du}{d\varpi}\right)^2\right\} - \mathrm{V}\right] + \left[\mathrm{V} + \psi^2\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2 - \frac{1}{\psi^2}\right] = 0,$$

si nous nous proposons alors d'y satisfaire, selon le procédé de Jacobi, à l'aide d'une somme de trois termes, telle que

$$(46) \qquad u = u_\varphi + u_\psi + u_\varpi,$$

dont chaque terme ne dépende que de la seule variable marquée en indice, et qui donnera par conséquent

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du_\varphi}{d\varphi}, \qquad \frac{du}{d\psi} = \frac{du_\psi}{d\psi}, \qquad \frac{du}{d\varpi} = \frac{du_\varpi}{d\varpi},$$

il est clair que la susdite équation (45) sera vérifiée en faisant à la fois

$$\left(\frac{du_\varphi}{d\varphi}\right)^2 - \mathrm{U}^2 = 0, \qquad \mathrm{csh}^2\varpi\left\{\mathrm{U}^2 + \left(\frac{du_\varpi}{d\varpi}\right)^2\right\} - \mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{V} + \psi^2\left(\frac{du_\psi}{d\psi}\right)^2 - \frac{1}{\psi^2} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(\frac{du_\varphi}{d\varphi}\right)^2 = \mathrm{U}^2, \qquad \left(\frac{du_\psi}{d\psi}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{1}{\psi^2} - \mathrm{V}\right), \qquad \left(\frac{du_\varpi}{d\varpi}\right)^2 = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{csh}^2\varpi} - \mathrm{U}^2,$$

conditions qui détermineront séparément les trois fonctions en question sous la forme

$$u_\varphi = \int \mathrm{U}\,d\varphi + \text{const.}, \qquad u_\psi = \int \frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - \mathrm{V}}\,d\psi + \text{const.},$$

$$u_\varpi = \int \sqrt{\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{csh}^2\varpi} - \mathrm{U}^2}\,d\varpi + \text{const.},$$

et donneront, par conséquent, pour l'expression (46) de u,

$$(47)\qquad u = U\varphi + \int \frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}\,d\psi + \int \sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi} - U^2}\,d\varpi + W,$$

laquelle renfermant trois constantes indéterminées U, V, W, sera une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (43), et l'expression des dérivées de u, dont la forme sera commune (la signification des symboles U et V étant seule différente) à cette intégrale complète, et à l'intégrale générale, ou semi-singulière, sera en conséquence

$$(48)\qquad L = \frac{du}{d\varphi} = U,\qquad M = \frac{du}{d\psi} = \frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V},\qquad N = \frac{du}{d\varpi} = \sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi} - U^2}.$$

2° Ce résultat acquis, comme ces dernières valeurs donneront elles-mêmes par la différentiation, en particulier, les six valeurs

$$\frac{d^2u}{d\psi d\varpi} = \begin{cases} \dfrac{dM}{d\varpi} = -\dfrac{1}{\psi^2}\dfrac{1}{2M}\dfrac{dV}{d\varpi}, \\[2ex] \dfrac{dN}{d\psi} = \dfrac{1}{2N}\left(\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\dfrac{dV}{d\psi} - 2U\dfrac{dU}{d\psi}\right), \end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{d\varpi d\varphi} = \begin{cases} \dfrac{dN}{d\varphi} = \dfrac{1}{2N}\left(\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\dfrac{dV}{d\varphi} - 2U\dfrac{dU}{d\varphi}\right), \\[2ex] \dfrac{dL}{d\varpi} = \dfrac{dU}{d\varpi}, \end{cases}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi d\psi} = \begin{cases} \dfrac{dL}{d\psi} = \dfrac{dU}{d\psi}, \\[2ex] \dfrac{dM}{d\varphi} = -\dfrac{1}{\psi^2}\dfrac{1}{2M}\dfrac{dV}{d\varphi}, \end{cases}$$

si l'on remet successivement ces deux séries de valeurs, en même temps que celles qui résultent pour les trois quantités H, K, J,

de nos hypothèses (40), savoir

$$H = QR = \frac{1}{\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi}, \qquad K = RP = \frac{1}{\psi^4}, \qquad J = PQ = \frac{1}{\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi},$$

dans les trois équations de Lamé (97) de notre Chapitre V, on obtiendra ainsi les six équations

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{\psi^2}\frac{1}{2M}\frac{dV}{d\varpi} = \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{dV}{d\psi} - 2U\frac{dU}{d\psi}\right) = -\frac{1}{\psi}N,\\ &\frac{1}{2N}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{dV}{d\varphi} - 2U\frac{dU}{d\varphi}\right) = \frac{dU}{d\varpi} = -\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}L,\\ &\frac{dU}{d\psi} = -\frac{1}{\psi^2}\frac{1}{2M}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{1}{\psi}L, \end{aligned}\right.$$

qui détermineront, d'autre part, les valeurs des six dérivées des quantités U et V.

Pour obtenir lesdites expressions, prenant d'abord celles de ces équations qui ne contiennent qu'une seule inconnue, nous aurons en premier lieu les quatre valeurs

$$(49) \qquad \frac{dU}{d\psi} = -\frac{1}{\psi}L, \qquad \frac{dV}{d\varphi} = 2\psi ML, \qquad \frac{dV}{d\varpi} = 2\psi MN, \qquad \frac{dU}{d\varpi} = -\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}L,$$

dont nous reporterons les deux premières dans les équations restantes des deux premières lignes, ce qui les transformera en les suivantes

$$\frac{1}{2N}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{dV}{d\psi} + 2U.\frac{1}{\psi}L\right) = -\frac{1}{\psi}N, \qquad \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\cdot 2\psi LM - 2U\frac{dU}{d\varphi}\right) = -\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}L,$$

lesquelles donneront à leur tour

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{dV}{d\psi} + 2UL = -2N^2, &&\text{d'où}\quad \frac{dV}{d\psi} = -\frac{2\operatorname{csh}^2\varpi}{\psi}\left(N^2 + UL\right),\\ &\text{et}\\ &\frac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi}ML - U\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}LN, &&\text{d'où}\quad \frac{dU}{d\varphi} = \frac{L}{U}\left(\frac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi}M + \frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}N\right). \end{aligned}\right.$$

De telle sorte qu'en remplaçant alors, dans ces deux valeurs de droite, ainsi que dans les quatre précédentes (49), L, M, N par leurs expressions en U et V (48), et les récrivant de nouveau dans un ordre rationnel, les expressions des six dérivées de U et V seront fournies définitivement par le tableau suivant (*)

$$(50)\quad \frac{dU}{d\varphi}=\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2}-V}+\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi}-U^2},\qquad \frac{dV}{d\varphi}=2U\sqrt{\frac{1}{\psi^2}-V},$$

$$(51)\quad \frac{dU}{d\psi}=-\frac{1}{\psi}U,\qquad \frac{dV}{d\psi}=-\frac{2}{\psi}V,$$

$$(52)\quad \frac{dU}{d\varpi}=-\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}U,\qquad \frac{dV}{d\varpi}=2\sqrt{\frac{1}{\psi^2}-V}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi}-U^2},$$

(*) La règle que nous appliquons ayant été complètement justifiée à propos du Cas général, nous ne croyons pas utile de reprendre ici les raisonnements et les calculs déjà développés, en vue d'établir soit l'impossibilité d'une solution fournie par une intégrale semi-singulière de l'équation (43), soit l'existence effective, sous la forme (47), d'une solution provenant de l'intégrale générale. Ces raisonnements, en effet, seraient encore exactement les mêmes pour le Cas actuel, et les calculs complètement analogues, sauf qu'ils seraient basés cette fois sur les équations (50), (51), et (52), au lieu des équations correspondantes (23) de la Note précédente.

A la vérité, dans la question présente, ces calculs n'offriraient plus la remarquable symétrie des précédents, qui, eu égard à la complication des expressions alors envisagées, nous a seule permis de les conduire à bonne fin. Mais ce défaut de symétrie sera d'autre part largement compensé, quant à leur facilité, par la simplicité très grande de la plupart des expressions et des équations que nous aurons actuellement à considérer.

Ainsi, par exemple, pour le premier des deux points précités (l'impossibilité d'une solution semi-singulière dans la question), l'hypothèse relative à ce cas $V=F(U)$ équivalant encore aux conditions

$$(\alpha)\qquad \frac{D(U,V)}{D(\psi,\varpi)}=0,\qquad \frac{D(U,V)}{D(\varpi,\varphi)}=0,\qquad \frac{D(U,V)}{D(\varphi,\psi)}=0,$$

et les expressions du premier et du troisième de ces déterminants fonctionnels, calculées de même à l'aide des équations précitées, étant maintenant celles-ci

$$\frac{D(U,V)}{D(\psi,\varpi)}=-\frac{2U}{\psi}.\Omega,\qquad \frac{D(U,V)}{D(\varphi,\psi)}=\frac{2}{\psi}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi}-U^2}.\Omega,$$

dans lesquelles le facteur Ω désigne à présent l'expression beaucoup plus simple

$$(\varepsilon)\qquad \Omega=\sqrt{\frac{1}{\psi^2}-V}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi}-U^2}+V\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi},$$

d'où l'on conclura immédiatement, pour déterminer nos deux inconnues U et V, le système des deux équations différentielles totales, qui tiendront lieu dans la question actuelle du système

---

il est clair que les conditions en question (α) équivaudront de nouveau à la seule équation $\Omega = 0$.

En reprenant donc identiquement le mode de raisonnement déjà employé, comme l'équation $\Omega = 0$ pourra très facilement cette fois être rendue rationnelle en U et V, il ne sera plus nécessaire actuellement, pour être certain du fait, d'éliminer les douze quantités, L, M, N et leurs dérivées, entre quatorze équations, ainsi que nous avons été contraints de le faire, lors du Cas général, pour n'avoir à considérer dans le calcul que des équations rationnelles, à cause de la très grande multiplicité des radicaux entrant alors dans l'équation $\Omega = 0$. Car l'équation analogue actuelle pouvant être écrite, en ayant égard à la seconde équation (52), sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(\gamma) \qquad \sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2 \varpi} - U^2} = -V\frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi} \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{d\varpi} = -2V\frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi},$$

ou, en chassant les radicaux et multipliant par $\operatorname{csh}^2 \varpi$,

$$(\delta) \qquad \left(V - \frac{1}{\psi^2}\right)(V - U^2 \operatorname{csh}^2 \varpi) + V^2 \operatorname{snh}^2 \varpi = 0,$$

si on la différentie successivement en φ, ψ, ϖ, et qu'on remette à la place des dérivées de U et V leurs expressions (50), (51), et (52), on aura ainsi quatre équations entre U, V et φ, ψ, ϖ, et en éliminant dès lors U et V entre ces quatre équations, on obtiendra finalement, entre les seules variables indépendantes, deux relations qui ne seront pas *toutes deux* des identités (l'une d'elle l'est, à la vérité), ainsi qu'il est bien facile de s'en assurer.

En effet, différentiant en ϖ cette dernière équation (δ), en s'aidant de l'équation de gauche (52) et de l'équation de droite précédente (γ), on trouvera sans peine pour résultat, toutes réductions faites,

$$\frac{2 \operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi} V \left[(V - U^2) \operatorname{csh}^2 \varpi - \frac{1}{\psi^2}\right] = 0,$$

équation à laquelle il ne sera pas possible de satisfaire en faisant $V = 0$, car cette hypothèse, reportée dans l'équation (δ) entraînerait également $U = 0$, et par suite aussi, pour les expressions (48), à la fois $L = 0$, $M = \frac{1}{\psi^2}$, $N = 0$, ou $u = f(\psi)$, et qui dès lors équivaut simplement à celle-ci :

$$(\varepsilon) \qquad (V - U^2) \operatorname{csh}^2 \varpi = \frac{1}{\psi^2}.$$

Or, l'équation (δ) pouvant elle-même être écrite

$$V\left[(V - U^2) \operatorname{csh}^2 \varpi - \frac{1}{\psi^2}\right] + \frac{U^2 \operatorname{csh}^2 \varpi}{\psi^2} = 0,$$

(24) ou (63) de la Note précédente relatif au Cas général,

(*)

$$(53)\quad \begin{cases} dU = \left(\dfrac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2} - V} + \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\sqrt{\dfrac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi} - U^2}\right).d\varphi - \dfrac{1}{\psi}U.d\psi - \dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}U.d\varpi, \\ dV = 2U\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2} - V}.d\varphi - \dfrac{2}{\psi}V.d\psi + 2\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2} - V}\sqrt{\dfrac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi} - U^2}.d\varpi; \end{cases}$$

---

il est clair que l'ensemble des deux équations (δ) et (ε) équivaudra dès lors simplement à celles-ci

$$U = 0, \qquad V = \frac{1}{\psi^2\,\mathrm{csh}^2\,\varpi},$$

valeurs qui, étant remises dans la première (50), donnent pour résultat $0 = \frac{2\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\psi\,\mathrm{csh}^3\,\varpi}$, et non pas l'indentité $0 = 0$, attendu que tous les radicaux qui entrent dans les six équations (50), (51), et (52), et qui sont par hypothèse les mêmes que ceux qui figurent dans les expressions (48) de L, M, N, devront encore être pris nécessairement tous avec la même détermination de signe pour que l'expression ci-après (62) de la différentielle *du* soit intégrable.

D'ailleurs, la valeur $U = 0$, considérée isolément, est *a priori* inadmissible, eu égard à la valeur (48) de la dérivée L, car elle exclurait la présence de la coordonnée φ dans les expressions des trois coordonnées rectilignes à la fois, ce qui équivaudrait alors à supposer une relation entre ces trois seules coordonnées.

(*) Si l'on désigne, pour un instant, respectivement par U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3 les seconds membres des équations (50), (51), et (52), auquel cas le même système d'équations différentielles totales s'écrira

$$dU = U_1 d\varphi + U_2 d\psi + U_3 d\varpi, \qquad dV = V_1 d\varphi + V_2 d\psi + V_3 d\varpi,$$

et que l'on représente de même par $\Omega_1(\omega)$, $\Omega_2(\omega)$, $\Omega_3(\omega)$, les premiers membres des trois équations aux dérivées partielles, qui suivent ces équations (53), l'on sait que les conditions d'intégrabilité de l'un ou l'autre de ces système seront exprimées par les six égalités

$$\Omega_2(U_3) = \Omega_3(U_2), \qquad \Omega_3(U_1) = \Omega_1(U_3), \qquad \Omega_1(U_2) = \Omega_2(U_1),$$
$$\Omega_2(V_3) = \Omega_3(V_2), \qquad \Omega_3(V_1) = \Omega_1(V_3), \qquad \Omega_1(V_2) = \Omega_2(V_1),$$

dont il sera rationnel et relativement aisé, eu égard à la simplicité des expressions actuelles, de constater la vérification identique, avant d'entreprendre l'intégration dudit système, tandis que, dans le Cas général, en raison de la complication des expressions des dérivées analogues, soit de Λ, M, N, soit de U et V, les opérations différentielles correspondantes, soit au système (117) de notre Chapitre V, soit au système (24) de la Note III précédente, eussent été aussi laborieuses que leur intégration elle-même : c'est pourquoi nous n'avons pas jugé à propos d'en faire mention dans ces deux circonstances, au moment où leur considération pouvait paraître s'imposer naturellement, à titre d'opération préalable, et en quelque sorte, de question préjudicielle.

lequel problème sera de nouveau complètement équivalent à la recherche de la solution la plus générale communes aux trois équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega}{d\varphi} + \left(\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - \mathrm{V}} + \frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\sqrt{\frac{\mathrm{V}}{\operatorname{csh}^2\varpi} - \mathrm{U}^2}\right).\frac{d\omega}{d\mathrm{U}} + 2\mathrm{U}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - \mathrm{V}}.\frac{d\omega}{d\mathrm{V}} = 0,\\ &\frac{d\omega}{d\psi} - \frac{1}{\psi}\mathrm{U}.\frac{d\omega}{d\mathrm{U}} - \frac{2}{\psi}\mathrm{V}.\frac{d\omega}{d\mathrm{V}} = 0,\\ &\frac{d\omega}{d\varpi} - \frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\mathrm{U}.\frac{d\omega}{d\mathrm{U}} + 2\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - \mathrm{V}}\sqrt{\frac{\mathrm{V}}{\operatorname{csh}^2\varpi} - \mathrm{U}^2}.\frac{d\omega}{d\mathrm{V}} = 0, \end{aligned}\right.$$

et pourra par conséquent être résolu soit par la méthode des *Vorlesungen*, que nous avons employée pour le précédent calcul, relatif à notre première méthode, soit par le procédé, en apparence plus favorable, de Mayer, qui n'exigera alors que *deux* intégrations seulement au lieu de *huit* (*) que nous avons dû effectuer dans le calcul précité, en faisant usage, pour le problème anologue, de la méthode de Jacobi.

Mais cette simplification apparente ne correspond pas en réalité à une facilité plus grande pour résoudre complètement la question, parce que, quelles que soient les variables auxiliaires que l'on adopte conformément aux indications de Mayer, le système transformé des deux équations ordinaires auquel on sera conduit sera toujours très compliqué, et que par suite son intégration complète, à laquelle est ainsi ramené le problème, offrira dès lors de sérieuses difficultés (**). Au lieu de cette méthode

(*) A savoir, celles des équations (6), (15), (18), (22), et (27).

(**) En adoptant la substitution

$$(\alpha)\qquad \varphi = a + (\varpi' - c)\,\varphi', \qquad \psi = b + (\varpi' - c)\,\psi', \qquad \varpi = \varpi',$$

qui semble être celle qui conduira au système à intégrer le moins compliqué (voir MANSION, *Théorie des Équations aux Dérivées Partielles du premier ordre,* Livre II, Chap. VI, 98, page 215, *au bas*), et qui donne

$$d\varphi = (\varpi' - c)\,d\varphi' + \varphi' d\varpi', \qquad d\psi = (\varpi' - c)\,d\psi' + \psi' d\varpi', \qquad d\varpi = d\varpi'$$

savante, il y aura donc grand avantage à faire usage, dans cette question encore, du procédé terre à terre, mais beaucoup plus simple et plus pratique, qui nous a déjà réussi pour le Cas général

---

le système proposé (53), que nous représenterons, pour abréger, par les deux équations

$$dU = U_1 d\varphi + U_2 d\psi + U_3 d\varpi, \qquad dV = V_1 d\varphi + V_2 d\psi + V_3 d\varpi,$$

en désignant par $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots \bar{V}_1, \ldots \bar{V}_3$ ce que deviennent respectivement $U_1, U_2, \ldots V_3$, c'est-à-dire les seconds membres des six égalités (50), (51), et (52) par le fait des substitutions (α), ce système proposé, disons-nous, se trouvera transformé par là dans celui-ci

$$\left\{\begin{aligned} dU &= \bar{U}_1(\varpi' - c).d\varphi' + \bar{U}_2(\varpi' - c).d\psi' + (\bar{U}_1\varphi' + \bar{U}_2\psi' + \bar{U}_3).d\varpi', \\ dV &= \bar{V}_1(\varpi' - c).d\varphi' + \bar{V}_2(\varpi' - c).d\psi' + (\bar{V}_1\varphi' + \bar{V}_2\psi' + \bar{V}_3).d\varpi', \end{aligned}\right.$$

et la question sera désormais réduite à l'intégration du seul système

$$\frac{dU}{d\varpi'} = \bar{U}_1\varphi' + \bar{U}_2\psi' + \bar{U}_3, \qquad \frac{dV}{d\varpi'} = \bar{V}_1\varphi' + \bar{V}_2\psi' + \bar{V}_3,$$

ou, sous forme explicite, et en effaçant les accents de celui-ci

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dU}{d\varpi} &= \varphi\left[\frac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}\sqrt{\frac{1}{[b+(\varpi-c)\psi]^2} - V} + \frac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi} - U^2}\right] - \left[\frac{\psi}{b+(\varpi-c)\psi} + \frac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\right], \\ \frac{dV}{d\varpi} &= 2\varphi\sqrt{\frac{1}{[b+(\varpi-c)\psi]^2} - V}.U - \frac{2\psi}{b+(\varpi-c)\psi}.V + 2\sqrt{\frac{1}{[b+(\varpi-c)\psi]^2} - V}\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi} - U^2}. \end{aligned}\right.$$

Or, la présence dans ce système de deux radicaux différents, contenant simultanément les deux inconnues U et V, en rend l'intégration beaucoup plus difficile que toutes celles que nous avons eu successivement à effectuer, avec la méthode de Jacobi, lors de notre précédent calcul.

L'insuccès de cette tentative avec la méthode de Mayer, se produisant après l'heureuse réussite du calcul à l'aide de la méthode de Jacobi, nous semble légitimer comme conclusion, à l'égard des avantages respectifs, et de la valeur pratique de ces deux méthodes, exactement la même appréciation qui a été souvent formulée au sujet de l'utilité et des mérites comparatifs de la méthode de Cauchy ou de Lagrange, et de la seconde méthode de Jacobi (*Nova Methodus*) pour l'intégration d'une équation unique aux dérivées partielles du premier ordre (ou si l'on veut encore, des deux méthodes successives de Jacobi entre elles) ; à savoir que, bien qu' « en apparence, la méthode de Jacobi exige plus d'intégrations », par le fait elle « laisse une (plus) grande liberté dans le calcul (MANSION, *loc. cit.*, Livre II, Chap. II, page 153), parce qu'au lieu « de ramener le problème à l'intégration complète d'un système d'équations différentielles ordinaires ..., on y considère successivement une série de systèmes d'équations différentielles, dans chacun desquels il suffit de déterminer une seule intégrale » (JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Poly-*

dans notre Chapitre V, et consistant à satisfaire successivement à toutes les équations (50), (51), et (52), en se servant à chaque fois des conditions restant à vérifier pour restreindre et préciser de plus en plus la forme des résultats.

Adoptant donc cette voie, nous remarquerons tout d'abord de nouveau que ces deux équations (53) étant complètement équivalentes aux six précédentes, leur intégration reviendra encore à trouver une intégrale générale commune aux trois systèmes (50), (51), et (52), dans lesquels ψ et ϖ sont des constantes pour le premier, ϖ et φ pour le second, φ et ψ pour le troisième.

Comme pour le Cas général d'ailleurs, il ne sera pas nécessaire, pour pouvoir en conclure les valeurs exactes des inconnues U et V, d'intégrer complètement ces trois systèmes à la fois. Il suffira pour cela, comme on va le voir, d'en intégrer un seul complètement, et de posséder la valeur attribuée à la seule inconnue U par les deux autres systèmes, ou, ce qui est la même chose, de connaître l'expression la plus générale de U commune aux trois systèmes, et l'expression de V relative à l'un de ces systèmes seulement : moyennant quoi, la valeur commune de cette seconde inconnue sera fournie, sans autre intégration, par la simple résolution d'une équation du second degré.

En effet, considérant d'abord le système (51), qui est évidemment le plus simple des trois, et qui, récrit ainsi

$$\frac{dU}{U} = -\frac{d\psi}{\psi}, \qquad \frac{dV}{V} = -2\frac{d\psi}{\psi},$$

donnera, en intégrant séparément chaque équation par quadrature,

$$(54) \qquad U = \frac{\mathcal{F}_2(\varpi, \varphi)}{\psi}, \qquad V = \frac{F_2(\varpi, \varphi)}{\psi^2},$$

---

technique, T. III, § 260, pp. 333-334), et que dès lors cette méthode sera souvent, en fait, celle dont l'application présentera le moins de difficultés.

Nous ne savons si la même remarque a déjà été faite au sujet de la comparaison des deux méthodes précitées de Mayer et de Jacobi; en tout cas, nous croyons que les deux calculs successivement parachevés, ou simplement indiqués, conformément à ces deux méthodes à propos du même problème, dans les pages ou dans les lignes qui précèdent, en fournissent, quant à cet exemple particulier, une preuve péremptoire, et, par voie d'induction, apportent en faveur de cette opinion, quant à la généralité des cas, une sérieuse vraisemblance, sinon une réelle présomption d'exactitude.

puis prenant ensuite, dans le système suivant (52), l'équation de gauche seulement, qui, pouvant s'écrire semblablement,

$$\frac{dU}{U} = -\frac{d.\operatorname{csh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi},$$

s'intégrera de même isolément, et donnera de la même façon

$$U = \frac{\mathcal{F}_3(\varphi, \psi)}{\operatorname{csh}\varpi}; \tag{55}$$

le simple rapprochement de ces deux expressions ainsi obtenues pour U donnera la condition

$$\frac{\mathcal{F}_2(\varpi, \varphi)}{\psi} = \frac{\mathcal{F}_3(\varphi, \psi)}{\operatorname{csh}\varpi}, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{csh}\varpi\, \mathcal{F}_2(\varpi, \varphi) = \psi\, \mathcal{F}_3(\varphi, \psi) = f(\varphi),$$

d'où l'on tirera

$$\mathcal{F}_2(\varpi, \varphi) = \frac{f(\varphi)}{\operatorname{csh}\varpi}, \qquad \mathcal{F}_3(\varphi, \psi) = \frac{f(\varphi)}{\psi},$$

et par suite, en revenant à l'expression (55) ou à la première (54), l'on aura déjà pour l'inconnue U la forme nécessaire

$$U = \frac{f(\varphi)}{\psi \operatorname{csh}\varpi}, \tag{56}$$

dans laquelle il ne reste plus à déterminer que la fonction d'une seule variable $f(\varphi)$.

Pour cela, venant enfin au premier système (50), il suffira de former, par l'élimination de V entre ces deux équations, l'équation du second ordre à laquelle satisfait dans ce système la seule inconnue U. Dans ce but, éliminant d'abord entre ces deux équations le premier radical, qui figure seul des deux à la fois dans les deux équations, nous formerons d'abord la combinaison

$$\frac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\frac{dV}{d\varphi} - 2U\frac{dU}{d\varphi} = -2U\frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\sqrt{\frac{V}{\operatorname{csh}^2\varpi} - U^2},$$

qui pourra être substituée à la première dans le système proposé (50), et permettra dès lors de récrire ce système, en divisant par les radicaux, sous la forme plus simple :

$$\frac{d}{d\varphi}\sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2\varpi} - U^2} = -\frac{\text{snh}\,\varpi}{\text{csh}\,\varpi}U, \qquad \frac{d}{d\varphi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V} = -U$$

Cela fait, différentiant en φ la première équation (50), nous obtiendrons la suivante

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{1}{\text{csh}^2\varpi}\frac{d}{d\varphi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V} + \frac{\text{snh}\,\varpi}{\text{csh}\,\varpi}\frac{d}{d\varphi}\sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2\varpi} - U^2},$$

ou, en tenant compte des précédentes,

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{-U}{\text{csh}^2\varpi} + \frac{\text{snh}\,\varpi}{\text{csh}\,\varpi}\left(-\frac{\text{snh}\,\varpi}{\text{csh}\,\varpi}U\right) = -\frac{1 + \text{snh}^2\varpi}{\text{csh}^2\varpi}U = -U,$$

c'est-à-dire, pour déterminer la seule inconnue U, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U = 0,$$

ou, en y remettant son expression ci-dessus (56), pour la fonction f, celle-ci

$$\frac{d^2.f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f(\varphi) = \alpha\cos(\varphi - \theta),$$

et par suite, en reportant dans ladite égalité (56), la valeur de l'inconnue U commune aux trois systèmes proposés (50), (51), et (52), sera définitivement

$$(57) \qquad U = \frac{\alpha\cos(\varphi - \theta)}{\psi\,\text{csh}\,\varpi}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dU}{d\varphi} = \frac{-\alpha\sin(\varphi - \theta)}{\psi\,\text{csh}\,\varpi}.$$

Cherchons maintenant celle de l'inconnue V.

A cet effet, remettant ces deux dernières valeurs, ainsi que

l'expression (54) de V, dans la première (50) qui contient bien V, mais non ses dérivées, cette équation deviendra

$$\frac{-\alpha \sin(\varphi - 6)}{\psi \operatorname{csh} \varpi} = \frac{1}{\operatorname{csh}^2 \varpi} \sqrt{\frac{1}{\psi^2} - \frac{F_2}{\psi^2}} + \frac{\operatorname{snh} \varpi}{\operatorname{csh} \varpi} \sqrt{\frac{F_2}{\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi} - \frac{\alpha^2 \cos^2(\varphi - 6)}{\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi}},$$

et par conséquent, en multipliant par $\psi \operatorname{csh}^2 \varpi$, et faisant, pour plus de simplicité,

$$(58) \qquad \sqrt{1 - F_2} = F_1, \qquad \text{d'où} \qquad F_2 = 1 - F_1^2, \qquad \text{et} \qquad V = \frac{1 - F_1^2}{\psi^2},$$

nous aurons alors, pour déterminer, à la place de F_2, la fonction $F_1(\varpi, \varphi)$, l'équation simplement algébrique, que l'on transformera successivement ainsi qu'il suit

$$-\alpha \sin(\varphi - 6) \operatorname{csh} \varpi = F_1 + \operatorname{snh} \varpi . \sqrt{1 - F_1^2 - \alpha^2 \cos^2(\varphi - 6)},$$

$$-\left[\alpha \sin(\varphi - 6) \operatorname{csh} \varpi + F_1\right] = \operatorname{snh} \varpi . \sqrt{1 - F_1^2 - \alpha^2 \{1 - \sin^2(\varphi - 6)\}},$$

$$\alpha^2 \sin^2(\varphi - 6) \operatorname{csh}^2 \varpi + 2\alpha \sin(\varphi - 6) \operatorname{csh} \varpi . F_1 + F_1^2$$
$$= \operatorname{snh}^2 \varpi . \left[1 - F_1^2 - \alpha^2 + \alpha^2 \sin^2(\varphi - 6)\right],$$

$$\alpha^2 \sin^2(\varphi - 6)(\operatorname{csh}^2 \varpi - \operatorname{snh}^2 \varpi) + 2\alpha \sin(\varphi - 6) . \operatorname{csh} \varpi F_1$$
$$+ (1 + \operatorname{snh}^2 \varpi) F_1^2 = \operatorname{snh}^2 \varpi . (1 - \alpha^2);$$

$$\left[\alpha \sin(\varphi - 6) + \operatorname{csh} \varpi F_1\right]^2 = (1 - \alpha^2) \operatorname{snh}^2 \varpi,$$

$$\alpha \sin(\varphi - 6) + \operatorname{csh} \varpi F_1 = \pm \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{snh} \varpi,$$

$$(59) \qquad F_1 = \frac{-1}{\operatorname{csh} \varpi} \left(\alpha \sin(\varphi - 6) \mp \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{snh} \varpi\right),$$

d'où l'on concluerait ensuite, en remettant cette valeur dans la troisième égalité (58), l'expression *définitive* de V, car celle ainsi formée ne contenant plus aucune fonction arbitraire, mais seulement le nombre strict de constantes arbitraires que comporte la solution devra dès lors satisfaire en l'état, conjointement avec celle (57) de U, aux seules équations non encore

vérifiées, savoir celles de droite (50) et (52), condition dont il est d'ailleurs bien facile de constater la vérification.

Possédant donc ainsi, par les valeurs (57), (58), et (59), les expressions cherchées des inconnues U et V qui satisfont à la fois aux six équations (50), (51), et (52), ou, ce qui est la même chose, au système d'équations différentielles-totales (53), les formules (48) nous donneront alors, à l'aide des valeurs précitées, d'abord pour les deux dérivées L et M, celles-ci :

(60)
$$\begin{cases} L = U = \dfrac{\alpha \cos(\varphi - 6)}{\psi \operatorname{csh} \varpi}, \\ M = \dfrac{1}{\psi}\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2} - V} = \dfrac{1}{\psi}\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2} - \dfrac{1 - F_1^2}{\psi^2}} = \dfrac{F_1}{\psi^2} = \dfrac{-1}{\psi^2}\left(\dfrac{\alpha \sin(\varphi - 6)}{\operatorname{csh} \varpi} \mp \sqrt{1-\alpha^2}\,\dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\right). \end{cases}$$

Quant à la troisième dérivée N, bien qu'on puisse évidemment l'obtenir de la même façon, le calcul en sera plus simple en tirant maintenant sa valeur de la première équation (50) qui, eu égard aux expressions (48) de L, M, N, peut s'écrire aussi bien

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{\psi}{\operatorname{csh}^2 \varpi} M + \frac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi} N, \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{\operatorname{csh}\varpi}{\operatorname{snh}\varpi}\left(\frac{dL}{d\varphi} - \frac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi} M\right),$$

et donnera par suite pour N, en tenant compte des valeurs précédentes (60) de L et M,

(61)
$$\begin{cases} N = \dfrac{\operatorname{csh}\varpi}{\operatorname{snh}\varpi}\left[\dfrac{-\alpha\sin(\varphi-6)}{\psi\operatorname{csh}\varpi} + \dfrac{\psi}{\operatorname{csh}^2\varpi}\cdot\dfrac{1}{\psi^2}\left(\dfrac{\alpha\sin(\varphi-6)}{\operatorname{csh}\varpi} \mp \sqrt{1-\alpha^2}\,\dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}\varpi}\right)\right] \\ \quad = \dfrac{1}{\operatorname{snh}\varpi}\,\dfrac{-\alpha\sin(\varphi-6)}{\psi}\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\right) \mp \dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\psi}\,\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi} \\ \quad = \dfrac{1}{\psi}\left(\dfrac{-\alpha\sin(\varphi-6)}{\operatorname{snh}\varpi}\,\dfrac{\operatorname{csh}^2\varpi - 1}{\operatorname{csh}^2\varpi} \mp \sqrt{1-\alpha^2}\,\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{\psi}\left(-\alpha\sin(\varphi-6)\,\dfrac{\operatorname{snh}\varpi}{\operatorname{csh}^2\varpi} \mp \sqrt{1-\alpha^2}\,\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\varpi}\right). \end{cases}$$

3° Or, il est visible que ces expressions ainsi obtenues par cette seconde méthode pour L, M, N, coïncideront exactement avec les valeurs (37) que nous avions déjà rencontrées par la première, à la seule condition de faire simplement dans lesdites valeurs $\gamma = \pm \sqrt{1-\alpha^2}$; et, par conséquent, ayant déjà vérifié, à l'occasion du calcul relatif à cette première méthode, qu'elles satisfaisaient bien à la condition d'intégrabilité, en premier lieu, la quadrature de la différentielle exacte

$$du = \text{L}d\varphi + \text{M}d\varphi + \text{N}d\varpi, \tag{62}$$

L, M, N étant par hypothèse les valeurs (60) et (61) que nous venons d'obtenir, nous fournira encore, pour l'expression de u, celle-ci

$$u = u_0 + \frac{1}{\psi \operatorname{csh} \varpi}\left(\alpha \sin(\varphi - 6) \mp \sqrt{1-\alpha^2} \operatorname{snh} \varpi\right), \tag{63}$$

qui coïnciderait avec celle précédemment obtenue (38), en y faisant le même changement de constantes que nous venons de dire.

4° En second lieu, les trois équations (41) ou (43) étant donc déjà satisfaites par l'expression (63), supposée récrite successivement pour les trois coordonnées rectilignes, les trois équations suivantes (42) ou (44), qui deviennent en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} \text{PL}''\text{L}''' + \text{QM}''\text{M}''' + \text{RN}''\text{N}''' = 0, \\ \text{PL}'''\text{L}' + \text{QM}'''\text{M}' + \text{RN}'''\text{N}' = 0, \\ \text{PL}'\text{L}'' + \text{QM}'\text{M}'' + \text{RN}'\text{N}'' = 0, \end{array}\right.$$

et qui doivent, avons-nous dit, se réduire à trois relations entre les six constantes d'intégration α et 6, n'étant autre chose, pour le Cas actuel, que les trois équations de droite (107) de notre Chapitre V, se confondront semblablement avec les trois relations déjà obtenues, lors du précédent calcul, pour représenter les mêmes équations, à savoir les trois relations de droite (39), à la condition d'y faire également $\gamma = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$, ce qui équivaut manifestement à leur adjoindre les trois équations de gauche

du même groupe, en conservant alors dans ces six équations les constantes γ à titre de constantes auxiliaires : en sorte que nous retomberons dès lors *littéralement* ainsi sur la solution obtenue plus haut, entrainant par conséquent encore avec elle l'interprétation géométrique que nous avons déjà formulée.

III

(IIe MÉTHODE : *Forme primitive, ou théorique.*) — Bien que le problème particulier que nous nous étions posé soit ainsi complètement résolu de nouveau par les calculs qui précèdent, il ne sera pas sans intérêt de vérifier rapidement sur ce cas simple, avant d'en faire usage utilement dans la Note suivante, que nous fussions bien parvenus exactement encore au même résultat, quoique d'une façon moins aisée, en nous tenant, pour la même recherche, au procédé exposé de prime abord dans la Note III, et sur lequel nous avons fondé la légitimité de l'autre procédé plus rapide que nous venons d'employer.

A cet effet, calculant les deux quadratures suivantes, que l'on obtient sans peine (*)

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}\, d\psi = -\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V} + \sqrt{V}\,\text{arc cos}\left(\sqrt{V}\,\psi\right), \\ &\int \sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2\,\varpi} - U^2}\, d\varpi = \sqrt{V}\,\text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\,\text{tgh}\,\varpi\right) + U\,\text{arc cos}\left(\frac{U\,\text{snh}\,\varpi}{\sqrt{V - U^2}}\right), \end{aligned}\right.$$

(*) En effet, pour la première on trouve immédiatement

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}\, d\psi &= \frac{1}{\psi}\,\frac{\frac{1}{\psi^2} - V}{\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}}\, d\psi = \frac{\frac{1}{\psi^3}\, d\psi}{\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}} - \frac{V d\psi}{\psi\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}} \\ &= -\frac{-2\psi^{-3} d\psi}{2\sqrt{\psi^{-2} - V}} + \sqrt{V}\,\frac{-\sqrt{V} d\psi}{\sqrt{1 - (\sqrt{V}\psi)^2}}, \end{aligned}\right.$$

l'intégrale complète correspondant à celle (8) de la Note III, à savoir celle (47) de la présente, sera dès lors, pour le cas actuel,

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} u = U \left[\varphi + \arc\cos\left(\frac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V - U^2}}\right)\right] - \sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V} \\ + \sqrt{V}\left[\arc\cos\left(\sqrt{V}\psi\right) + \arc\sin\left(\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi\right)\right] + W. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en différentiant en U et V la même équation (47), on trouvera

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{dW}{dU} &= \varphi + \int \frac{-U d\varpi}{\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}} = \varphi + \arc\cos\left(\frac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V - U^2}}\right), \quad (^*) \\ -\frac{dW}{dV} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\psi}\frac{-d\psi}{\sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V}} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}d\varpi}{\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{V}}\left[\arc\cos\left(\sqrt{V}\psi\right) + \arc\sin\left(\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

---

et de même pour la seconde, attendu que l'on aura

$$\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2} = \sqrt{\frac{V(\mathrm{csh}^2\,\varpi - \mathrm{snh}^2\,\varpi)}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2} = \sqrt{V - U^2 - V\frac{\mathrm{snh}^2\,\varpi}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}},$$

on trouvera de même aisément

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}\,d\varpi &= \frac{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}{\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}}d\varpi = \frac{V\frac{\mathrm{csh}^2\,\varpi - \mathrm{snh}^2\,\varpi}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}d\varpi}{\sqrt{V - U^2 - V\frac{\mathrm{snh}^2\,\varpi}{\mathrm{csh}^2\,\varpi}}} - \frac{U^2 d\varpi}{\sqrt{\frac{V}{\mathrm{csh}^2\,\varpi} - U^2}} \\ &= \sqrt{V}\frac{d\left(\sqrt{V}\frac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\right)}{\sqrt{V - U^2 - \left(\sqrt{V}\frac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\right)^2}} + U\frac{-U\,\mathrm{csh}\,\varpi\,d\varpi}{\sqrt{V - U^2 - U^2\,\mathrm{snh}^2\,\varpi}}, \end{aligned} \right.$$

d'où, en intégrant, les deux expressions marquées ci-dessus.

(*) En effet, les deux premières de ces intégrales ne sont autres, abstraction faite des

Pour calculer la fonction W à l'aide de ces deux équations, posant

$$(65)\quad P = \arc\cos\left(\frac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V-U^2}}\right),\quad Q = \arc\cos(\sqrt{V}\psi),\quad R = \arc\sin\left(\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi\right),$$

celles-ci s'écriront, avec ces notations,

$$-\frac{dW}{dU} = \varphi + P,\qquad -\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\sqrt{V}}(Q+R),$$

ou bien

$$-\left(\frac{dW}{dU}+6\right) = \varphi - 6 + P,\qquad -2\sqrt{V}\frac{dW}{dV} = Q + R,$$

et donneront, par suite,

$$(66)\quad \begin{cases} -\sin\left(\dfrac{dW}{dU}+6\right) = \sin(\varphi - 6 + P) = \sin(\varphi-6)\cos P + \cos(\varphi-6)\sin P, \\ \cos\left(2\sqrt{V}\dfrac{dW}{dV}\right) = \cos(Q+R) = \cos Q\cos R - \sin Q\sin R. \end{cases}$$

Or, d'une part, les définitions (65) fournissent immédiatement les valeurs

---

facteurs constants U ou $\sqrt{V}$, que celles des deux expressions du dernier membre des égalités (6) ou (α) de la note précédente; et quant à la troisième, on trouvera semblablement, sans plus de difficultés,

$$\frac{\dfrac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}d\varpi}{\sqrt{\dfrac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi}-U^2}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\,\frac{\sqrt{V}\dfrac{\mathrm{csh}^2\varpi-\mathrm{snh}^2\varpi}{\mathrm{csh}^2\varpi}d\varpi}{\sqrt{V\dfrac{\mathrm{csh}^2\varpi-\mathrm{snh}^2\varpi}{\mathrm{csh}^2\varpi}-U^2}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\,\frac{d\left(\sqrt{V}\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\right)}{\sqrt{V-U^2-\left(\sqrt{V}\dfrac{\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\right)^2}},$$

d'où l'on conclura les deux valeurs écrites plus haut, valeurs que l'on obtiendrait également, bien entendu, mais d'une façon plus pénible, par la différentiation immédiate en U et V de l'expression (64) obtenue pour U.

$$(67)\begin{cases}\cos P = \dfrac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V-U^2}},\\[2mm] \sin P = \pm\sqrt{1-\dfrac{U^2\mathrm{snh}^2\varpi}{V-U^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{V-U^2-U^2\mathrm{snh}^2\varpi}{V-U^2}} = \pm\dfrac{\sqrt{V-U^2\mathrm{csh}^2\varpi}}{\sqrt{V-U^2}},\\[2mm] \cos Q = \sqrt{V}\,\psi,\\[2mm] \sin Q = \pm\sqrt{1-V\psi^2} = \pm\,\psi^2.\dfrac{1}{\psi}\sqrt{\dfrac{1}{\psi^2}-V},\\[2mm] \sin R = \sqrt{\dfrac{V}{V-U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi,\\[2mm] \cos R = \pm\sqrt{1-\dfrac{V}{V-U^2}\dfrac{\mathrm{snh}^2\varpi}{\mathrm{csh}^2\varpi}} = \pm\sqrt{\dfrac{(V-U^2)\mathrm{csh}^2\varpi - V\,\mathrm{snh}^2\varpi}{(V-U^2)\mathrm{csh}^2\varpi}} = \pm\dfrac{\sqrt{\dfrac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi}-U^2}}{\sqrt{V-U^2}}.\end{cases}$$

D'autre part, en tenant compte des expressions primitives (48) des dérivées M et N, ainsi que des valeurs (60) et (61) définitivement obtenues pour elles, et aussi de la valeur (57) trouvée pour U, qui donnera

$$\cos(\varphi - \theta) = \frac{U\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi}{\alpha},$$

les valeurs de rang pair de ce dernier tableau (67) deviennent

$$(68)\begin{cases}\sin P = \dfrac{\pm\,\mathrm{csh}\,\varpi\sqrt{\dfrac{V}{\mathrm{csh}^2\varpi}-U^2}}{\sqrt{V-U^2}} = \dfrac{\pm\,\mathrm{csh}.N}{\sqrt{V-U^2}} = \dfrac{\mp\left[\gamma+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-\theta)\right]}{\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi\sqrt{V-U^2}},\\[2mm] \sin Q = \pm\,\psi^2.M = \dfrac{\mp\left[\alpha\sin(\varphi-\theta)-\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi\right]}{\mathrm{csh}\,\varpi},\\[2mm] \cos R = \dfrac{\pm N}{\sqrt{V-U^2}} = \dfrac{\mp\left[\gamma+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-\theta)\right]}{\psi\,\mathrm{csh}^2\varpi\sqrt{V-U^2}}.\end{cases}$$

En remettant donc ces quatre dernières valeurs en même temps

que les valeurs de rang impair (67) dans les deux équations (66), celles-ci deviendront

$$\left\{\begin{aligned} -\sin\left(\frac{dW}{dU}+6\right) &= \sin(\varphi-6)\cdot\frac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V-U^2}} \mp \frac{U\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi}{\alpha}\,\frac{\gamma+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-6)}{\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi\sqrt{V-U^2}},\\ \cos\left(2V\frac{dW}{dV}\right) &= \mp\sqrt{V}\psi\cdot\frac{\gamma+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-6)}{\psi\,\mathrm{csh}^2\varpi\sqrt{V-U^2}} \pm \frac{\alpha\sin(\varphi-6)-\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\mathrm{csh}\,\varpi}\cdot\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi. \end{aligned}\right.$$

On voit dès lors qu'il suffira de prendre exclusivement le signe supérieur dans la première ligne (68) ou seconde (67), et de même le signe inférieur dans les autres lignes des mêmes égalités, pour qu'elles se réduisent simultanément à celles-ci

$$-\sin\left(\frac{dW}{dU}+6\right) = \frac{U}{\sqrt{V-U^2}}\left[\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-6) - \left(\frac{\gamma}{\alpha}+\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-6)\right)\right],$$

$$\cos\left(2V\frac{dW}{dV}\right) = \sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\,\frac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}\left[\{\gamma+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\sin(\varphi-6)\} - \{\alpha\sin(\varphi-6)-\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi\}\mathrm{snh}\,\varpi\right],$$

ou simplement

$$\sin\left(\frac{dW}{dU}+6\right) = \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{U}{\sqrt{V-U^2}},\qquad \cos\left(2V\frac{dW}{dV}\right) = \sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\,\frac{\gamma(1+\mathrm{snh}^2\varpi)}{\mathrm{csh}^2\varpi} = \gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}},$$

et donnent par conséquent

$$(69)\qquad \frac{dW}{dU} = -6 + \mathrm{arc}\sin\left(\frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{U}{\sqrt{V-U^2}}\right),\qquad \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\sqrt{V}}\,\mathrm{arc}\cos\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\right).$$

Ces valeurs satisfont bien, comme il le faut, à la condition d'intégrabilité, car en représentant la première par W_1 et la seconde par W_2, et tenant compte de la définition $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2}$, il est bien facile de vérifier qu'elle donneront

$$\frac{dW_2}{dU} = \frac{dW_1}{dV} = -\frac{1}{2}\,\frac{\gamma U}{V-U^2}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 V-U^2}},$$

à la condition de supposer dans lesdites expressions (69) l'arc sinus compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'arc cosinus compris entre 0 et π, et, en les entendant ainsi, l'expression de l'inconnue W en résultera dès lors, conformément à notre théorie, par simple quadrature.

Pour la calculer, partant de la seconde expression dérivée (69) W_2 ou $\frac{dW}{dV}$, puis faisant

$$(70) \qquad \gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}=z, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma^2 V=(V-U^2)z^2.$$

et

$$(71) \qquad V=\frac{U^2z^2}{z^2-\gamma^2}=U^2\left(1+\frac{\gamma^2}{z^2-\gamma^2}\right), \qquad dV=-\frac{2\gamma^2U^2zdz}{(z^2-\gamma^2)^2},$$

nous trouverons donc

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} W&=\int\frac{1}{2\sqrt{V}}\text{arc cos}\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\right)dV+C\\ &=\int\frac{1}{2\dfrac{Uz}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}}\text{arc cos}\, z.\frac{-2\gamma^2U^2zdz}{(z^2-\gamma^2)^2}+C=-\gamma^2U\int\frac{\text{arc cos}\, z.dz}{(z^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}+C\\ &=-\gamma^2U.\frac{-1}{\gamma^2}\left[\frac{z\,\text{arc cos}\, z}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}+\frac{1}{2}\text{arc cos}\frac{1+\gamma^2-2z^2}{1-\gamma^2}\right]+C. \quad (*)\end{aligned}\right.$$

(*) Cette quadrature ne rentrant dans aucune des diverses catégories que l'on étudie généralement dans l'enseignement, semblera peut-être, pour certains Lecteurs, difficile à calculer. Nous croyons donc devoir indiquer, pour l'obtenir, le procédé suivant, simple et commode, qui permettrait également de ramener à des types connus, d'une façon générale, pour un entier quelconque n, le calcul des intégrales

$$\int\frac{\text{arc sin}\, z.dz}{(z^2-\gamma^2)^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \text{ou} \qquad \int\frac{\text{arc cos}\, z.dz}{(z^2-\gamma^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Faisant, pour abréger,

$$(\alpha) \qquad I=\int\frac{\text{arc cos}\, z.dz}{(z^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad J=\int\text{arc cos}\, z.dz=z\,\text{arc cos}\, z-\sqrt{1-z^2},$$

Or, ayant, en vertu de la définition précitée de γ,

$$(73)\qquad 1-\gamma^2=1-(1-\alpha^2)=\alpha^2,\qquad 1+\gamma^2=1+(1-\alpha^2)=2-\alpha^2,$$

$$(74)\qquad \frac{1+\gamma^2-2z^2}{1-\gamma^2}=\frac{2-\alpha^2-2z^2}{\alpha^2}=\frac{2(1-z^2)}{\alpha^2}-1,$$

---

nous partirons de cette formule, que donne l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int(z^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\arccos z.dz &= (z^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.J+\tfrac{1}{2}\int J.\,(z^2-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}2zdz\\ &=(z^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.J+\int(z^2-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\left[(z^2-\gamma^2+\gamma^2)\arccos z-z\sqrt{1-z^2}\right]dz\\ &=(z^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.J+\int(z^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\arccos z.dz+\int\gamma^2(z^2-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}\arccos z.dz\\ &\qquad -\int(z^2-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}.z\sqrt{1-z^2}dz,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$(6)\qquad 0=\frac{J}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}+\gamma^2 I-\int\frac{z\sqrt{1-z^2}}{(z^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

Or, la dernière intégrale qui figure dans cette égalité est très facile à calculer, car si l'on fait $z^2=u$, on trouvera très aisément, en intégrant de nouveau par parties,

$$\begin{aligned}\int\frac{z\sqrt{1-z^2}}{(z^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}dz&=\int\sqrt{1-u}.\frac{1}{2}(u-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}du=-\sqrt{1-u}(u-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u-\gamma^2}\sqrt{1-u}}\\ &=-\sqrt{\frac{1-u}{u-\gamma^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{-du}{\sqrt{\left(\frac{1-\gamma^2}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\gamma^2}{2}-u\right)^2}}\\ &=-\left[\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2-\gamma^2}}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\frac{1+\gamma^2}{2}-z^2}{\frac{1-\gamma^2}{2}}\right].\end{aligned}$$

En remettant donc cette valeur, ainsi que celle (α) de J, dans la formule de réduction (6) obtenue tout à l'heure, elle deviendra

$$\frac{z\arccos z-\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}+\gamma^2 I+\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\gamma^2-2z^2}{1-\gamma^2}\right]=0,$$

et concluant, d'une part, des égalités (70), (73), et la première (71),

$$(75)\qquad 1-z^2=1-\frac{\gamma^2 V}{V-U^2}=\frac{\alpha^2 V-U^2}{V-U^2},\qquad \frac{z}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}=\frac{\sqrt{V}}{U},$$

et d'autre part, des égalités précédentes (74) et (75),

$$(76)\left\{\begin{aligned}&\frac{1+\gamma^2-2z^2}{1-\gamma^2}=\frac{2}{\alpha^2}\frac{\alpha^2 V-U^2}{V-U^2}-1=\frac{2(\alpha^2 V-U^2)-\alpha^2(V-U^2)}{\alpha^2(V-U^2)}\\&=\frac{\alpha^2 V-(2-\alpha^2)U^2}{\alpha^2(V-U^2)}=\frac{\alpha^2(V-U^2)-2(1-\alpha^2)U^2}{\alpha^2(V-U^2)}=1-2\frac{\gamma^2 U^2}{\alpha^2(V-U^2)}.\end{aligned}\right.$$

puis observant enfin que la constante d'intégration C est ici une fonction de l'autre variable indépendante U, le résultat obtenu tout à l'heure (72) deviendra, en tenant compte de la seconde (75), de la première (70), et de la dernière (76),

$$(77)\qquad W=\sqrt{V}\arccos\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}\right)+\frac{1}{2}U\arccos\left(1-2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V-U^2}\right)+\Phi(U),$$

expression qui, étant différentiée en U, donnera, toutes réductions faites, simplement

$$\frac{dW}{dU}=\frac{1}{2}\arccos\left(1-2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V-U^2}\right)+\Phi'(U).$$

Égalant donc, en vue de déterminer la fonction $\Phi(U)$, cette dernière valeur à l'expression donnée (69) de W_1 ou $\frac{dW}{dU}$, nous formerons ainsi l'équation

$$(78)\qquad \frac{1}{2}\arccos\left(1-2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V-U^2}\right)+\Phi'(U)=-6+\arcsin\left(\frac{\gamma}{\alpha}\frac{U}{\sqrt{V-U^2}}\right)$$

---

et fournira par suite, en réduisant, pour l'intégrale demandée I, la valeur

$$(\gamma)\qquad I=\int\frac{\arccos z.dz}{(z^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{\gamma^2}\left[\frac{z\arccos z}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\gamma^2-2z^2}{1-\gamma^2}\right],$$

qui est celle introduite ci-dessus dans notre calcul.

de laquelle nous sommes certains, *a priori*, que disparaîtra la variable indépendante V considérée en premier lieu.

Effectivement, si nous posons pour un instant

$$(79)\qquad S = \arccos\left(1 - 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V - U^2}\right), \qquad T = \arcsin\left(\frac{\gamma}{\alpha}\frac{U}{\sqrt{V - U^2}}\right),$$

l'équation précédente (78) s'écrira à l'aide de ces notations

$$(80)\qquad \frac{1}{2}S + \Phi'(U) = -\beta + T, \qquad \text{ou} \qquad -2\left[\Phi'(U) + \beta\right] = S - 2T;$$

or, les définitions (79) donnant immédiatement

$$(81)\qquad \cos S = 1 - 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V - U}, \qquad \sin T = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{U}{\sqrt{V - U^2}},$$

on en conclura

$$(82)\qquad \cos S = 1 - 2\sin^2 T = \cos 2T, \qquad \cos^2 T = 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V - U^2},$$

Par conséquent, les deux arcs S et 2T ayant le même cosinus, on aura dès lors nécessairement

$$S \mp 2T = 2k\pi,$$

k étant un entier positif ou négatif. En prenant donc le signe supérieur, l'équation de droite (80) se réduira simplement à

$$\Phi'(U) + \beta = -k\pi, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi(U) = -(\beta + k\pi)U + \text{const.},$$

valeur qui donnera par suite, en premier lieu, pour l'expression (77) de W, celle-ci

$$W = U\left[-\beta - k\pi + \frac{1}{2}\arccos\left(1 - 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V - U^2}\right)\right] + \sqrt{V}\arccos\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\right) + \text{const.};$$

puis, en second lieu, en reportant cette dernière expression elle-même dans la formule (64), l'expression cherchée de κ s'obtien-

dra donc par cette méthode, de prime abord, sous la forme

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & U\left[\varphi - 6 - k\pi + \arccos\left(\frac{U\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\sqrt{V - U^2}}\right) + \frac{1}{2}\arccos\left(1 - 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{U^2}{V - U^2}\right)\right] \\ & + \sqrt{V}\left[\arccos(\sqrt{V}\psi) + \arcsin\left(\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\,\mathrm{tgh}\,\varpi\right) + \arccos\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\right)\right] \\ & - \sqrt{\frac{1}{\psi^2} - V} + \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

à la condition d'y remettre, à la place de U et V, leurs valeurs ci-dessus trouvées, (57) d'une part, et (58)-(59) de l'autre.

En ayant recours de nouveau à nos notations déjà usitées (65) et (79), et convenant de faire en outre, par analogie avec la définition (70),

$$(84)\qquad \Phi = \varphi - 6 - k\pi, \qquad Z = \arccos z = \arccos\left(\gamma\sqrt{\frac{V}{V - U^2}}\right),$$

puis rappelant enfin la valeur primitive (48) de M, le résultat auquel nous venons d'arriver (83) pourra s'écrire sous la forme abrégée

$$u = \frac{1}{2}U(2\Phi + 2P + S) + \sqrt{V}(Q + R + Z) - \psi M + \text{const.}$$

Or, si l'on calcule alors, à l'aide des valeurs (67), (68), (81), et des autres analogues que l'on déduira des définitions (84) de Φ et Z, les tangentes des deux expressions entre parenthèses que multiplient, au second membre de cette dernière égalité, les facteurs $\frac{1}{2}$ U et $\sqrt{V}$, on trouve que ces tangentes sont l'une et l'autre égales à zéro (*).

(*) Cette vérification, assez laborieuse, exige impérieusement, pour aboutir, un très grand ordre et une méthode très stricte dans les calculs. Voici, croyons-nous, comment on y devra procéder, sous peine de n'en pas sortir.

Lesdites expressions elles-mêmes ont donc pour valeurs $m\pi$ et $n\pi$, m et n étant deux nombres entiers quelconques, et dès lors la même égalité se réduira simplement, en tenant compte

---

Si, dans la formule classique

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1-(\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c+\operatorname{tg} c \operatorname{tg} a+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)},$$

on suppose

$$\operatorname{tang} a=\frac{\mathcal{A}}{A}, \qquad \operatorname{tang} b=\frac{\mathcal{B}}{B}, \qquad \operatorname{tang} c=\frac{\mathcal{C}}{C},$$

il s'ensuivra que la condition, pour que la tangente de la somme $(a+b+c)$ soit nulle, sera, dans cette hypothèse, exprimée par l'égalité

$$(\alpha) \qquad BC\mathcal{A}+CA\mathcal{B}+AB\mathcal{C}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}=0.$$

Il s'agit donc de reconnaître que cette condition se trouve remplie séparément à l'égard de chacune des deux sommes $(2\Phi+2P+S)$ et $(Q+R+Z)$.

Dans ce but, tirant, d'une part, des définitions (84)

$$(\alpha') \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tang} 2\Phi=\operatorname{tang}[2(\varphi-\theta)-2k\pi]=\frac{\sin 2(\varphi-\theta)}{\cos 2(\varphi-\theta)}=\frac{2\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta)}{1-2\sin^2(\varphi-\theta)}, & \\ \cos Z=\gamma\sqrt{\frac{V}{V-U^2}}, & \sin^2 Z=1-\frac{\gamma^2 V}{V-U^2}=\frac{V-U^2-(1-\alpha^2)V}{V-U^2}, \\ \sin Z=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2 V-U^2}}{V-U^2}, & \operatorname{tang} Z=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2 V-U}}{\gamma\sqrt{V}}, \end{array} \right.$$

et d'autre part, des formules (67), et (68) dans lesquelles nous avons pris, on s'en souvient, le signe supérieur pour la première ligne, et le signe inférieur pour les deux autres lignes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2P=2\sin P\cos P=\frac{2\operatorname{csh}\varpi\, N.U\operatorname{snh}\varpi}{V-U^2}, \\ \cos 2P=\cos^2 P-\sin^2 P=\frac{U^2\operatorname{snh}^2\varpi-(V-U^2\operatorname{csh}^2\varpi)}{V-U^2}=\frac{U^2(1+2\operatorname{snh}^2\varpi)-V}{V-U^2}, \\ \operatorname{tang} 2P=\frac{2\operatorname{csh}\varpi\, N.U\operatorname{snh}\varpi}{U^2(1+2\operatorname{snh}^2\varpi)-V}=\frac{2\psi\operatorname{csh}^2\varpi N.\psi\operatorname{csh}\varpi U.\operatorname{snh}\varpi}{\psi^2\operatorname{csh}^2\varpi U^2.(1+2\operatorname{snh}^2\varpi)-\psi^2\operatorname{csh}^2\varpi V}, \\ \operatorname{tang} Q=\frac{\sin Q}{\cos Q}=-\frac{\psi^2 M}{\sqrt{V\psi}}, \qquad \operatorname{tang} R=\frac{\sin R}{\cos R}=-\frac{\sqrt{V\operatorname{tgh}\varpi}}{N}, \end{array} \right.$$

XI.

de l'expression (60) obtenue définitivement pour M, à celle-ci :

$$(85)\qquad u = \frac{1}{2}\,U.\,m\pi + \sqrt{V}.\,n\pi + \frac{1}{\psi \operatorname{csh}\varpi}\Big(\alpha \sin(\varphi - \beta) - \gamma \operatorname{snh}\varpi\Big) + u_0.$$

Dans cette expression, les deux derniers termes renfermant déjà à eux seuls toutes les constantes arbitraires qui doivent,

---

et enfin des valeurs (82) et (81),

$$(\alpha'')\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin^2 S = 1 - \cos^2 S = 1 - \cos^2 2T = \sin^2 2T = 4 \sin^2 T \cos^2 T,\\
&\qquad = 4\,\frac{\gamma^2 U^2}{\alpha^2 (V - U^2)}\,\frac{\alpha^2 (V - U^2) - \gamma^2 U^2}{\alpha^2 (V - U^2)} = \frac{4\gamma^2 U^2 [\alpha^2 (V - U^2) - (1 - \alpha^2) U^2]}{\alpha^4 (V - U^2)^2},\\
&\cos S = \frac{\alpha^2 (V - U^2) - 2\gamma^2 U^2}{\alpha^2 (V - U^2)} = \frac{\alpha^2 (V - U^2) - 2(1 - \alpha^2) U^2}{\alpha^2 (V - U^2)} = \frac{\alpha^2 V - U^2 - \gamma^2 U^2}{\alpha^2 (V - U^2)}.\\
&\operatorname{tang} S = \frac{\sin S}{\cos S} = \pm \frac{2\gamma U \sqrt{\alpha^2 V - U^2}}{(\alpha^2 V - U^2) - \gamma^2 U^2} = \pm \frac{2\gamma.\,\dfrac{\psi \operatorname{csh}\varpi}{\alpha}\,U.\,\dfrac{\psi \operatorname{csh}\varpi}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 V - U^2}}{\dfrac{\psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi}{\alpha^2}(\alpha^2 V - U^2) - \gamma^2.\,\dfrac{\psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi}{\alpha^2}\,U^2},
\end{aligned}\right.$$

il résultera dès lors de ces différentes valeurs que, si l'on pose, d'une part,

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 = 2 \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta), && A_1 = 1 - 2 \sin^2(\varphi - \beta),\\
&\mathcal{B}_1 = 2\psi \operatorname{csh}^2\varpi N.\,\psi \operatorname{csh}\varpi U.\operatorname{snh}\varpi, && B_1 = \psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi U^2 (1 + 2 \operatorname{snh}^2\varpi) - \psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi V,\\
&\mathcal{C}_1 = 2\gamma.\,\frac{\psi \operatorname{csh}\varpi}{\alpha}\,U.\,\frac{\psi \operatorname{csh}\varpi}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 V^2 - U^2}, && C_1 = \frac{\psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi}{\alpha^2}(\alpha^2 V - U^2) - \gamma^2\,\frac{\psi^2 \operatorname{csh}^2\varpi}{\alpha^2}\,U^2,
\end{aligned}\right.$$

et, d'autre part,

$$(\gamma)\quad \mathcal{A}_2 = -\psi^2 M,\quad A_2 = \sqrt{V}\psi,\quad \mathcal{B}_2 = -\sqrt{V} \operatorname{tgh}\varpi,\quad B_2 = N,\quad \mathcal{C}_2 = -\sqrt{\alpha^2 V - U^2},\quad C_2 = \gamma\sqrt{V},$$

on aura à la fois, en prenant le signe + dans la dernière ligne d'égalités (α''), et le signe − dans la dernière ligne (α'),

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} 2\Phi = \frac{\mathcal{A}_1}{A_1}, && \operatorname{tang} 2P = \frac{\mathcal{B}_1}{B_1}, && \operatorname{tang} S = \frac{\mathcal{C}_1}{C_1},\\
&\operatorname{tang} Q = \frac{\mathcal{A}_2}{A_2}, && \operatorname{tang} R = \frac{\mathcal{B}_2}{B_2}, && \operatorname{tang} Z = \frac{\mathcal{C}_2}{C_2},
\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, le calcul proposé consistera simplement à vérifier qu'avec les valeurs (β) et (γ) des $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et des A, B, C, soit pour l'indice 1, soit pour l'indice 2, la condition précitée (α) se trouve effectivement remplie.

d'après notre théorie de la Note III, figurer dans la solution la plus générale, à savoir les deux constantes α et β introduites par l'intégration du système d'équations différentielles totales, et la

---

A cet effet, remarquant tout d'abord que les valeurs indiquées pour U et V par les égalités (57), et (58) - (59), savoir

$$(\delta)\qquad U=\frac{\alpha\cos(\varphi-\beta)}{\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi},\qquad V=\frac{1}{\psi^2}\left[1-\frac{1}{\mathrm{csh}^2\varpi}\left(\alpha\sin(\varphi-\beta)-\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{snh}\,\varpi\right)^2\right],$$

dont la seconde peut être réduite successivement, eu égard à la définition $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2}$,

$$(\varepsilon)\quad\begin{cases} V=\dfrac{1}{\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi}\left[\mathrm{csh}^2\varpi-\mathrm{snh}^2\varpi-\alpha^2\sin^2(\varphi-\beta)+2\alpha\sin(\varphi-\beta).\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\right]\\ \quad=\dfrac{1}{\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi}\left[1-\alpha^2\sin^2(\varphi-\beta)+2\alpha\sin(\varphi-\beta).\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\right],\end{cases}$$

donneront dès lors, étant considérées simultanément,

$$\alpha^2V=\frac{\alpha^2}{\psi^2\mathrm{csh}^2\varpi}\left[1-\sin^2(\varphi-\beta)+(1-\alpha^2)\sin^2(\varphi-\beta)+2\alpha\gamma\sin(\varphi-\beta)\mathrm{snh}\,\varpi+\alpha^2\mathrm{snh}^2\varpi\right]$$

$$=\frac{1}{\psi^2\mathrm{csh}^2\varpi}\left[\alpha^2\cos^2(\varphi-\beta)+\alpha^2\left\{\gamma^2\sin^2(\varphi-\beta)+2\gamma\sin(\varphi-\beta)\ \alpha\,\mathrm{snh}\varpi+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\right\}\right]$$

$$=U^2+\frac{\alpha^2\left[\gamma\sin(\varphi-\beta)+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi\right]^2}{\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi},$$

nous en conclurons, par conséquent, en premier lieu

$$(\eta)\qquad \sqrt{\alpha^2V-U^2}=\alpha\left(\frac{\gamma\sin(\varphi-\beta)+\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi}{\psi\,\mathrm{csh}\,\varpi}\right).$$

De ces expressions (δ), (ε), et (η) elles-mêmes, on déduira ensuite, pour les valeurs des quantités B_1 et C_1 (6) ci-dessus,

$$(\theta)\quad\begin{cases} B_1=\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi\,U^2.(1+2\,\mathrm{snh}^2\varpi)-\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi.V\\ \quad=\alpha^2\cos^2(\varphi-\beta).(1+2\,\mathrm{snh}^2\varpi)-\left[1-\alpha^2\sin^2(\varphi-\beta)+2\alpha\sin(\varphi-\beta).\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi+\alpha^2\mathrm{snh}^2\varpi\right]\\ \quad=\alpha^2\left[\cos^2(\varphi-\beta)+\sin^2(\varphi-\beta)\right]-\left[1+2\alpha^2\cos^2(\varphi-\beta)\,\mathrm{snh}^2\varpi-2\alpha\sin(\varphi-\beta).\gamma\,\mathrm{snh}\varpi-\alpha^2\mathrm{snh}^2\varpi\right]\\ \quad=(\alpha^2-1)+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\left[2\cos^2(\varphi-\beta)-1\right]-2\alpha\sin(\varphi-\beta).\gamma\,\mathrm{snh}\,\varpi\\ \quad=-\gamma^2+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\left[1-2\sin^2(\varphi-\beta)\right]-2\alpha\gamma\sin(\varphi-\beta)\,\mathrm{snh}\,\varpi,\\[2ex] C_1=\dfrac{\psi^2\,\mathrm{csh}^2\varpi}{\alpha^2}(\alpha^2V-U^2)-\gamma^2.\dfrac{\psi^2\mathrm{csh}^2\varpi\,U^2}{\alpha^2}\\ \quad=\left[\gamma^2\sin^2(\varphi-\beta)+2\gamma\sin(\varphi-\beta).\alpha\,\mathrm{snh}\,\varpi+\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi\right]-\gamma^2.\cos^2(\varphi-\beta),\\ \quad=\alpha^2\,\mathrm{snh}^2\varpi+2\alpha\gamma\sin(\varphi-\beta)\,\mathrm{snh}\,\varpi+\gamma^2\left[\sin^2(\varphi-\beta)-\cos^2(\varphi-\beta)\right].\end{cases}$$

constante additive u_0, les deux entiers quelconques m et n qui multiplient les deux premiers termes constituent donc des arbitraires *surabondantes*, dont l'introduction dans la solution actuelle

---

Ces résultats étant acquis, faisant maintenant, tant pour abréger l'écriture que pour faciliter la lecture des calculs,

$$\operatorname{snh} \varpi = p, \qquad \sin(\varphi - \beta) = q, \qquad \cos(\varphi - \beta) = \sqrt{1 - q^2} = r,$$

les expressions précédentes (δ), (ε), et (η), ainsi que celles (60) et (61) de M et N, deviendront, avec ces notations,

$$(\zeta) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{U} = \frac{\alpha r}{\psi \operatorname{csh} \varpi}, \qquad \mathrm{V} = \frac{1 - \alpha^2 q^2 + 2\alpha q . \gamma p + \alpha^2 p^2}{\psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi}, \\ &\sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2} = \frac{\alpha(\gamma q + \alpha p)}{\psi \operatorname{csh} \varpi}, \qquad \mathrm{M} = \frac{-(\alpha q - \gamma p)}{\psi^2 \operatorname{csh} \varpi}, \qquad \mathrm{N} = \frac{-(\alpha q p + \gamma)}{\psi \operatorname{csh}^2 \varpi}, \end{aligned} \right.$$

de telle sorte qu'en transcrivant de même les valeurs (θ) trouvées tout à l'heure pour B_1 et C_1, les six quantités (β), relatives à l'indice 1, seront alors, en ordonnant tous les différents facteurs par rapport à p,

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{A}_1 = 2qr, \qquad \mathcal{B}_1 = -2(\alpha q . p + \gamma)\alpha r . p, \qquad \mathcal{C}_1 = 2\gamma . r . (\alpha p + \gamma q), \\ &\mathrm{A}_1 = -(2q^2 - 1), \qquad \mathrm{B}_1 = -[\alpha^2(2q^2 - 1)p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2], \qquad \mathrm{C}_1 = \alpha^2 p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2(2q^2 - 1), \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, la condition pour que la tangente de la première somme $(2\Phi + 2\mathrm{P} + \mathrm{S})$ soit égale à zéro, sera exprimée par l'égalité

$$0 = \mathrm{B}_1 \mathrm{C}_1 \mathcal{A}_1 + \mathrm{C}_1 \mathrm{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \mathcal{C}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1 = \Delta_1,$$

Δ_1 étant donc, pour abréger, la quantité

$$(\iota) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 = &-[\alpha^2(2q^2 - 1) . p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2] . [\alpha^2 p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2(2q^2 - 1)] . 2qr \\ &+ [\alpha^2 p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2(2q^2 - 1)] . (2q^2 - 1)\ 2\alpha r(\alpha q . p^2 + \gamma p) \\ &+ (2q^2 - 1) . [\alpha^2(2q^2 - 1) . p^2 + 2\alpha\gamma q . p + \gamma^2] . 2\gamma r(\alpha p + \gamma q) \\ &+ 2qr . 2\alpha r(\alpha q p^2 + \gamma p) . 2\gamma r(\alpha p + \gamma q). \end{aligned} \right.$$

De même, la condition pour que la tangente de la seconde somme $(\mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{Z})$ soit nulle également, sera exprimée, eu égard aux valeurs (γ), par cette autre égalité

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{B}_2 \mathrm{C}_2 \mathcal{A}_2 + \mathrm{C}_2 \mathrm{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathrm{A}_2 \mathrm{B}_2 \mathcal{C}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 \\ &= -\mathrm{N} . \gamma\sqrt{\mathrm{V}}\,\psi^2 \mathrm{M} - \gamma\sqrt{\mathrm{V}} . \sqrt{\mathrm{V}}\psi . \sqrt{\mathrm{V}} \operatorname{tgh} \varpi - \sqrt{\mathrm{V}}\psi . \mathrm{N} . \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2} \\ &\qquad + \psi^2 \mathrm{M} \sqrt{\mathrm{V}} \operatorname{tgh} \varpi . \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2} \\ &= -\frac{\sqrt{\mathrm{V}}}{\psi \operatorname{csh}^3 \varpi} \Big[\psi \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{N} . \gamma . \psi^2 \operatorname{csh} \varpi \mathrm{M} + \gamma . \psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{V} . \operatorname{snh} \varpi \\ &\qquad + \psi \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{N} . \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2} - \psi^2 \operatorname{csh} \varpi \mathrm{M} . \operatorname{snh} \varpi . \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2} \Big] \\ &= -\frac{\sqrt{\mathrm{V}}}{\psi \operatorname{csh}^3 \varpi} \Delta_2, \end{aligned}$$

provient de ce que la détermination, tant de la fonction auxiliaire W que de l'inconnue cherchée u elle-même, a été obtenue, dans ce dernier mode de calcul, par la considération *directe* (et non plus, comme au Chapitre IV pour le Cas général, par l'*inversion*), de quadratures transcendantes, qui comportent essentiellement, comme l'on sait, une infinité de valeurs répondant à la question.

Partant de cette remarque, pour déterminer ces deux arbitraires surabondantes m et n, différentions en ψ cette dernière égalité ; nous obtiendrons pour la dérivée $\frac{du}{d\psi} = \mathrm{M}$ la valeur

$$\mathrm{M} = \left(\frac{1}{2} m \frac{d\mathrm{U}}{d\psi} + n \frac{d\sqrt{\mathrm{V}}}{d\psi}\right) \pi - \frac{\alpha \sin(\varphi - \theta) - \gamma \operatorname{snh} \varpi}{\psi^2 \operatorname{csh} \varpi},$$

c'est-à-dire simplement, en ayant égard à l'expression défini-

---

ou simplement $\Delta_2 = 0$, Δ_2 étant cette fois la quantité

$$\Delta_2 = \psi \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{N} . \gamma \psi^2 \operatorname{csh} \varpi \mathrm{M} + \gamma . \psi^2 \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{V} . \operatorname{snh} \varpi$$
$$+ \psi \operatorname{csh}^2 \varpi \mathrm{N} . \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V}^2 - \mathrm{U}^2} - \psi^2 \operatorname{csh} \varpi \mathrm{M} \operatorname{snh} \varpi \ \psi \operatorname{csh} \varpi . \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 \mathrm{V} - \mathrm{U}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu des valeurs (ς) ordonnées par rapport à p, celle-ci

$$(\varkappa) \quad \begin{cases} \Delta_2 = -(\alpha q . p + \gamma)\ \gamma . (\gamma p - \alpha q) + \gamma . [\alpha^2 p^2 + 2 \alpha \gamma q . p + 1 - \alpha^2 q^2] . p \\ \quad - (\alpha q\ p + \gamma) . \alpha\ (\alpha p + \gamma q) - (\gamma p - \alpha q) . p . \alpha (\alpha p + \gamma p). \end{cases}$$

La question étant ainsi posée, si, après avoir développé les deux expressions (ϸ) et (ϰ), on les ordonne l'une et l'autre par rapport à p, de manière à les mettre sous la forme

$$\Delta_1 = \mathrm{G}_1 p^4 + \mathrm{H}_1 p^3 + \mathrm{K}_1 p^2 + \mathrm{I}_1 p + \mathrm{J}_1, \qquad \Delta_2 = \mathrm{H}_2 p^3 + \mathrm{K}_2 p^2 + \mathrm{I}_2 p + \mathrm{J}_2,$$

puis que, dans l'expression de chacun des coefficients ainsi calculés, G, H, ... J, on remplace partout r par $\sqrt{1 - q^2}$ et γ par $\sqrt{1 - \alpha^2}$, auquel cas ils deviendront, sauf les facteurs γ et r, des fonctions entières de q et de α seuls, il sera très facile alors de reconnaître séparément que chacun de ces coefficients est bien identiquement nul : d'où il suit que l'on a, comme nous le disons dans le texte,

$$\operatorname{tang}(2\Phi + 2\mathrm{P} + \mathrm{S}) = 0, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}(\mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{Z}) = 0,$$

c'est-à-dire, par conséquent,

$$2\Phi + 2\mathrm{P} + \mathrm{S} = m\pi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{Z} = n\pi.$$

tive (60) de **M**, l'égalité :

$$\frac{1}{2} m \frac{dU}{d\psi} + n \frac{d\sqrt{V}}{d\psi} = 0.$$

Or, si l'on tient compte des deux équations (51), dont celle de droite donnera

$$\frac{d\sqrt{V}}{d\psi} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{dV}{d\psi} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{-2}{\psi} V = -\frac{1}{\psi} \sqrt{V},$$

cette dernière elle-même équivaudra par conséquent à celle-ci

$$-\frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{2} mU + n\sqrt{V}\right) = 0, \qquad \text{ou} \qquad mU + 2n\sqrt{V} = 0,$$

laquelle, devant être vérifiée quels que soient U et $\sqrt{V}$ (attendu que l'on pourrait prendre évidemment pour variables indépendantes, à la place de φ, ψ, et ϖ, par exemple φ, U, et $\sqrt{V}$), exigera dès lors que les coefficients m et n soient séparément nuls. D'où il suit que la solution à laquelle nous sommes arrivés (85) se réduira définitivement à

$$u = u_0 + \frac{1}{\psi \operatorname{csh} \varpi}\left(\alpha \sin(\varphi - 6) - \gamma \operatorname{snh} \varpi\right),$$

et l'on retombe bien ainsi sur le résultat obtenu déjà dans les deux numéros précédents par deux autres procédés.

NOTE V

SUR UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE(*) DU THÉORÈME D'ABEL, POUR LE CAS PARTICULIER DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES, RENFERMÉE IMPLICITEMENT DANS LES RÉSULTATS DE LA NOTE III PRÉCÉDENTE.

La théorie que nous avons développée dans la Note III ci-dessus, comme seconde méthode pour traiter le problème déjà résolu dans notre Chapitre V, n'offre pas d'intérêt seulement quant à la question spéciale du Système triplement Isotherme, en vue de laquelle nous l'avons exposée ; elle met encore en lumière, d'une façon simple, l'un des résultats les plus considérables de la Science moderne, auquel on arrive habituellement, dans les différents traités d'Analyse, par des procédés beaucoup plus élevés. Aussi ne résistons-nous pas, maintenant que notre tâche est accomplie, à l'envie de cueillir, avant de terminer, ce fruit mûr de nos recherches précédentes, qui s'offre ainsi sur notre route, suivant en cela l'exemple illustre de Jacobi, qui, rencontrant également le même résultat comme application de sa belle méthode d'intégration des systèmes canoniques d'équations différentielles, ne trouve pas déplacé de lui consacrer l'une de ses Leçons sur la Dynamique (**).

A la vérité, de même que cette démonstration de Jacobi, celle que nous allons présenter dans cette Note n'envisagera pas le cas le plus général des fonctions auxquelles se rapporte le célèbre théorème en question, et se contentera de l'établir à

(*) Nous entendons par ce mot *élémentaire* une démonstration indépendante des considérations d'intersection de courbes, empruntées à la Géométrie Supérieure, sur lesquelles on a coutume, dans les différents traités d'Analyse, de fonder la démonstration du célèbre théorème d'Abel.

(**) VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK, 30ste Vorl., page 231.

propos des seules transcendantes qui viennent, par ordre de complication, immédiatement après celles que l'on étudie dans l'enseignement classique, à savoir les fonctions hyperelliptiques de la première classe; mais ce cas particulier le plus simple suffit parfaitement, comme on le verra, pour mettre en pleine lumière la proposition dont il s'agit, et permettre dès l'instant d'en apprécier l'importance. C'est, au reste, ce que prouverait d'une façon péremptoire, s'il en était besoin, l'intéressante application que nous nous proposons d'en faire, après que nous l'aurons démontrée complètement de la manière suivante.

I

Si dans les formules diverses et les différents résultats de la Note III ci-dessus, c'est-à-dire notamment dans les formules (48), (46), (66), et (87), nous convenons d'attribuer aux deux fonctions U et V deux valeurs constantes quelconques, les trois fonctions de ces variables

$$W = -\frac{1}{4d}\mathcal{F}(U, V) + \text{const.}, \qquad W_1 = \frac{d\mathcal{F}}{dV}, \qquad W_2 = \frac{d\mathcal{F}}{dU},$$

se réduiront par là semblablement à de simples constantes; et si nous représentons dans cette hypothèse par $F(\rho)$ le polynôme du cinquième degré

$$(1) \qquad F(\rho) = f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V),$$

nous aurons alors, entre les quatre variables u, λ, μ, ν et les constantes U, V, α, β, γ, ou bien U, V, W_1, W_2, suivant que nous supposerons le calcul effectué comme nous l'avons fait en réalité dans le second paragraphe de la Note III, ou comme nous l'avions exposé tout d'abord dans le paragraphe I : dans la première hypothèse, les deux équations (66) et la solution (87), dans

lesquelles X, Y, Z représentent par définition les expressions (65), et qui sont par conséquent algébriques en λ, μ, ν; et dans la seconde hypothèse, les deux équations (32), que nous récrirons alors, sous forme condensée, ainsi qu'il suit

$$(2) \qquad \sum_\rho \int^{\cdot} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, \qquad \sum_\rho \int^{\cdot} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2,$$

et la même solution sous la forme primitive (49) ou (8), qui s'écrira avec le même mode de notation

$$u = \frac{1}{2d} \sum_\rho \int^{\cdot} \sqrt{\frac{\rho^2 + U\rho + V}{f(\rho)}}\, d\rho + W,$$

et pourra par conséquent être mise aussi bien, à l'aide du symbole F, sous la forme

$$\sum_\rho \int^{\cdot} \frac{\rho^2 + U\rho + V}{\sqrt{F(\rho)}}\, d\rho = 2d.(u - W),$$

ou mieux encore, en retranchant de cette dernière équation les précédentes (2), respectivement multipliées par les facteurs constants V et U, sous cette autre forme, analogue à celle des dites équations (2),

$$\sum_\rho \int^{\cdot} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.(u - W) - (VW_1 + UW_2) = 2d.(u - W_3),$$

en désignant, pour abréger, par W_3 la nouvelle constante

$$W_3 = W + \frac{1}{2d}(VW_1 + UW_2).$$

Cela revient à dire, en résumé, que nous aurons alors entre les

quatre variables u, λ, μ, ν les trois équations

$$(3)\qquad \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, \quad \sum_\rho \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \quad \sum_\rho \int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.(u - W_3),$$

qui peuvent être considérées comme constituant l'intégrale générale, sous forme transcendante, du système d'équations différentielles simultanées

$$(4)\qquad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0, \qquad \sum_\rho \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0, \qquad \sum_\rho \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.du,$$

pendant que les trois équations précitées (66) et (87) de la Note III, savoir

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha X + 6Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2) - (\lambda + \mu + \nu) = U, \\ \left(\frac{bc}{a}\alpha X + \frac{ca}{b} 6Y + \frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{6^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\lambda\mu\nu = V, \end{array} \right.$$

$$(6)\qquad \alpha X + 6Y + \gamma Z = d.(u - u_0),$$

constitueront pareillement, mais sous forme algébrique cette fois, l'intégrale générale du même système (4).

C'est donc le *Théorème d'Abel*, pour les fonctions hyperelliptiques de la première classe engendrées par l'irrationnelle $\sqrt{F(\rho)}$, qui ressort ainsi d'une façon inopinée des raisonnements et des calculs que nous avons présentés dans la Note III, sous la forme même où Jacobi l'établit dans ses *Vorlesungen* (*), et que nous

(*) « Dies sind die transcendenten Integralgleichungen des Systems gewöhnlicher » Differentialgleichungen (4), während in (5)-(6) die algebraischen Integralgleichungen des » nämlichen Systems enthalten sind.

» In dieser algebraischen Integration der Differentialgleichungen (4) besteht das » *Abel*sche Theorem, ... » dit textuellement Jacobi, en substituant toutefois, pour l'adaptation de ce texte à la démonstration ci-dessus, le numérotage de nos propres équations à celui du passage en question des *Vorlesungen* (30ste Vorl., p. 234, en haut).

Pour faire d'ailleurs coïncider *littéralement* les formules de l'illustre Auteur, tant avec celles que nous venons de donner, qu'avec celles que nous allons présenter ultérieurement

rencontrons de notre côté, comme conséquence de la double voie que nous avons indiquée, successivement dans le premier et le deuxième paragraphe de cette Note, pour obtenir la solution du problème que nous nous proposions d'y traiter.

Toutefois, comme ce n'est pas précisément sous cette forme que ce même théorème est présenté dans plusieurs traités d'Analyse, nous croyons utile de faire voir également que l'autre énoncé, sous lequel on le trouve habituellement formulé, peut se déduire aussi bien de nos calculs antérieurs avec la même facilité (*).

Pour cela, remarquant en premier lieu que les trois équations (3) envisagées tout à l'heure offrent ce caractère commun que les premiers membres rentrent tous dans le type $\sum_{\rho} \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ pour les trois premières valeurs entières $m = 0, 1, 2$ et que, eu égard à l'équation (6), le second membre est dans chacune une fonction algébrique des variables λ, μ, ν (cette fonction se réduisant

---

dans cette Note, il suffira d'établir simplement entre les deux systèmes de notation la corrélation suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{2A'}{d}, \quad \alpha_2 = \frac{2B'}{d}, \quad \alpha_3 = \frac{2C'}{d}, \\ \alpha'_1 = A'' + A'W_3, \quad \alpha'_2 = B'' + B'W_3, \quad \alpha'_3 = C'' + C'W_3, \\ x_1 = X, \quad x_2 = Y, \quad x_3 = Z, \quad \lambda_i = \rho, \quad n = 3, \quad f = F, \\ a_1 = a^2, \quad a_2 = b^2, \quad a_3 = c^2, \quad c = V, \quad c_1 = U, \quad c_2 = \frac{1}{2}h = 1, \\ c' = \frac{1}{2}W_1, \quad c'_1 = \frac{1}{2}W_2, \quad t = \frac{1}{2}d.u, \quad \tau = \frac{1}{2}d.W_3, \end{array}\right.$$

moyennant quoi, les formules (3), (8), et (9) de la démonstration précitée de Jacobi, ainsi que la formule sans numéro qui précède ces deux dernières, se confondront *littéralement* avec nos propres formules (21), (3), et (4) empruntées à la présente Note.

(*) Jacobi, en effet, dans le passage précité des *Vorlesungen*, ne prend pas la peine d'établir la concordance en question, qu'il laisse à la sagacité du Lecteur le soin de rechercher et de vérifier.

même à une simple constante pour les deux premières), il est bien facile de voir que l'on pourra déduire successivement des précédentes une équation présentant le même caractère pour chaque valeur entière et positive de l'exposant m.

En effet, tout d'abord, pour la valeur suivante $m=3$, la différentiation des dites équations (3) fournissant immédiatement les trois équations suivantes (4), si nous posons pour un instant

$$(7) \qquad \xi = \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}, \qquad \eta = \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}, \qquad \zeta = \frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}},$$

ces trois équations (4) établissant alors entre les trois inconnues ξ, η, ζ le système linéaire dont le dénominateur commun sera le déterminant Δ, savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi + \eta + \zeta = 0, \\ \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0, \\ \lambda^2\xi + \mu^2\eta + \nu^2\zeta = 2d.du, \end{array} \right. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \end{vmatrix},$$

elles fourniront donc pour ces trois inconnues les valeurs

$$(8) \quad \xi = \frac{1}{\Delta}(\nu - \mu).2d.du, \qquad \eta = \frac{1}{\Delta}(\lambda - \nu).2d.du, \qquad \zeta = \frac{1}{\Delta}(\mu - \lambda).2d.du,$$

d'où l'on conclura par conséquent pour la différentielle de l'expression précitée

$$\sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{\lambda^3 d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{\nu^3 d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = \lambda^3\xi + \mu^3\eta + \nu^3\zeta$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[(\nu - \mu)\lambda^3 + (\lambda - \nu)\mu^3 + (\mu - \lambda)\nu^3\right] 2d.du,$$

c'est-à-dire, en faisant attention que la valeur du déterminant Δ

n'est autre que la quantité que nous avons appelée Θ dans notre Chapitre V [équation (115)], savoir

$$(9) \qquad \Delta = (\nu-\mu)\lambda^2 + (\lambda-\nu)\mu^2 + (\mu-\lambda)\nu^2 = (\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu) = \Theta,$$

puis ayant égard de plus à la seconde formule (59) de la Note III, on trouvera pour l'expression de la différentielle en question :

$$(10) \qquad \sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{1}{\Theta}.\Theta(\lambda+\mu+\nu).2d.du = 2d.(\lambda+\mu+\nu)\,du.$$

Or, comme, d'autre part, la première équation (5) et l'équation (6), dans lesquelles U est par hypothèse une simple constante, fournissent immédiatement la valeur

$$\begin{aligned}\lambda+\mu+\nu &= (\alpha X + 6Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2) - U \\ &= d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U),\end{aligned}$$

l'égalité précédente (10), devenant par la substitution de cette dernière valeur

$$\begin{aligned}\sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= 2d.\left[d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\right]du, \\ &= 2d^3.(u-u_0)^2\,du - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.du,\end{aligned}$$

donnera tout de suite, en intégrant, puis ayant égard de nouveau à l'équation (6),

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned}\sum_\rho \int \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{2}{3}d^3.(u-u_0)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.(u-u_0) + \text{const.}, \\ &= \frac{2}{3}(\alpha X + 6Y + \gamma Z)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)(\alpha X + 6Y + \gamma Z) + \text{const.},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire encore une expression algébrique en λ, μ, ν.

Or, ce résultat suffit pour établir le fait que nous avons annoncé tout à l'heure, car le degré du polynôme sous le radical $F(\rho)$ étant 5, un procédé de réduction exposé dans la plupart des traités d'enseignement classique permettra d'exprimer toutes les intégrales telles que $\int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, pour une valeur entière et posi-

tive quelconque de l'exposant m, en fonction linéaire des quatre premières intégrales seules, savoir celles correspondant aux deux valeurs 0 et 1 qui sont dites de *première espèce*, et celles correspondant aux valeurs 2 et 3 qui sont dites de *seconde espèce*. Et dès lors, en ajoutant ensemble les trois égalités semblables qui fourniraient l'expression d'une même intégrale du type précité, respectivement pour les trois valeurs $\rho = \lambda, \mu, \nu$, il est bien évident que l'on obtiendra ainsi pour la somme $\sum_\rho \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ une expression de même catégorie analytique que chacune des quatre sommes analogues correspondant aux quatre valeurs ci-dessus spécifiées de l'exposant m, savoir, $m = 0, 1, 2, 3$, c'est-à-dire par conséquent une fonction simplement algébrique des variables λ, μ, ν.

Plus généralement, si l'on convient de représenter, quel que soit ρ, par u_ρ le radical $\sqrt{F(\rho)}$, ou, ce qui est la même chose, la fonction de ρ déterminée par l'équation algébrique

$$(12) \qquad u_\rho^2 - f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V) = 0,$$

il y a lieu de se demander à quelle catégorie analytique appartiendra, en tenant compte des équations considérées (3), ou (5) et (6), l'expression d'une somme d'intégrales telles que $\sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$, φ désignant une fonction rationnelle à la fois par rapport à ρ et à u_ρ.

A cet effet, opérant à l'égard des trois équations de définition (65) de la Note III, comme nous le faisons à la fin du Chapitre V, à propos des équations (155), nous mettrons ce système sous la forme équivalente

$$\left\{\begin{aligned} \frac{X^2}{a^2+\lambda} + \frac{Y^2}{b^2+\lambda} + \frac{Z^2}{c^2+\lambda} &= 1, \\ \frac{X^2}{a^2+\mu} + \frac{Y^2}{b^2+\mu} + \frac{Z^2}{c^2+\mu} &= 1, \\ \frac{X^2}{a^2+\nu} + \frac{Y^2}{b^2+\nu} + \frac{Z^2}{c^2+\nu} &= 1, \end{aligned}\right.$$

qui montre que les trois coordonnées λ, μ, ν sont les trois racines de l'équation du troisième degré

$$(13)\qquad \frac{X^2}{a^2+\rho}+\frac{Y^2}{b^2+\rho}+\frac{Z^2}{c^2+\rho}=1,$$

ou, ce qui est la même chose, sous forme entière, de l'équation $\mathcal{F}(\rho)=0$, en désignant par $\mathcal{F}(\rho)$ le polynôme

$$(14)\qquad \mathcal{F}(\rho)=-f(\rho)\left(\frac{X^2}{a^2+\rho}+\frac{Y^2}{b^2+\rho}+\frac{Z^2}{c^2+\rho}-1\right),$$

c'est-à-dire en développant, puis en ordonnant par rapport à l'inconnue ρ,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho) &= -\left[X^2(b^2+\rho)(c^2+\rho)+Y^2(c^2+\rho)(a^2+\rho)+Z^2(a^2+\rho)(b^2+\rho)\right] \\ &\qquad\qquad + (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho), \\ &= \rho^3+\left[a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2)\right]\rho^2+\left[\ldots\ldots\right]\rho \\ &\qquad\qquad + a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2)=0, \end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, que l'on a les relations

$$(16)\qquad \mathcal{F}(\rho)=(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} -(\lambda+\mu+\nu) &= a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2) \\ -\lambda\mu\nu &= a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2). \end{aligned}\right.$$

Ces dernières valeurs étant donc substituées dans les deux équations (5), en tenant compte en même temps de la relation (64) de la Note III, savoir

$$(18)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

les transformeront dès lors dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} U &= (\alpha X+\beta Y+\gamma Z)^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2) \\ &\qquad + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2)\right], \\ V &= \left(\frac{bc}{a}\alpha X+\frac{ca}{b}\beta Y+\frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2 \\ &\qquad + \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left[a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2)\right], \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en changeant tous les signes,

$$\left\{\begin{aligned} -\mathrm{U} &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)-(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})^2\\ &\qquad -\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)\right],\\ -\mathrm{V} &= \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)(b^2c^2\mathrm{X}^2+c^2a^2\mathrm{Y}^2+a^2b^2\mathrm{Z}^2)\\ &\qquad -\left(\frac{\alpha}{a}.bc\mathrm{X}+\frac{\beta}{b}.ca\mathrm{Y}+\frac{\gamma}{c}.ab\mathrm{Z}\right)^2-a^2b^2c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right), \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire finalement, en vertu de l'identité de Lagrange,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} -\mathrm{U} &= \quad(\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z})^2+\quad(\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X})^2+\quad(\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y})^2\\ &\qquad -\left[(b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2\right],\\ -\mathrm{V} &= a^2(\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z})^2+b^2(\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X})^2+c^2(\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y})^2\\ &\qquad -(b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2). \end{aligned}\right.$$

De cette nouvelle forme des équations (5) ressort immédiatement une conséquence importante que leur forme primitive n'eût pas permis d'apercevoir, à savoir que les trois quantités X, Y, Z sont de simples fonctions linéaires de u; car, si, en vue de déterminer leurs expressions en fonction de cette variable, l'on introduit, à titre d'inconnues auxiliaires, les trois quantités

$$(19^{\text{bis}})\qquad \mathfrak{X}=\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z},\qquad \mathfrak{Y}=\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X},\qquad \mathfrak{Z}=\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y},$$

lesquelles seront astreintes par conséquent, par leur définition même, à vérifier les équations

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\mathfrak{X}+\beta\mathfrak{Y}+\gamma\mathfrak{Z}=0,\qquad \mathfrak{X}\mathrm{X}+\mathfrak{Y}\mathrm{Y}+\mathfrak{Z}\mathrm{Z}=0,\\ &\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=(\beta-\gamma)\mathrm{X}+(\gamma-\alpha)\mathrm{Y}+(\alpha-\beta)\mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

et si l'on désigne alors, pour un instant, par H et K les deux constantes

$$(20^{\text{bis}})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= (b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2-\mathrm{U},\\ \mathrm{K} &= \qquad b^2c^2\alpha^2+\qquad c^2a^2\beta^2+\qquad a^2b^2\gamma^2-\mathrm{V}, \end{aligned}\right.$$

l'ensemble des six équations (20), (19), et (6), auxquelles devront satisfaire simultanément nos six inconnues $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, X, Y, Z, et qui seront, étant récrites avec ces notations,

$$(20^{ter}) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z} = 0, & \mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z = 0, \\ \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = H, & (\beta-\gamma)X + (\gamma-\alpha)Y + (\alpha-\beta)Z = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}, \\ a^2\mathfrak{X}^2 + b^2\mathfrak{Y}^2 + c^2\mathfrak{Z}^2 = K, & \alpha X + \beta Y + \gamma Z = d.(u - u_0), \end{array} \right.$$

se partagera, comme on le voit, en deux systèmes partiels : celui de gauche, dont tous les coefficients sont constants, déterminant évidemment en premier lieu les inconnues auxiliaires $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, sous la forme de simples constantes; et, partant de ce résultat, celui de droite déterminera ensuite les inconnues X, Y, Z, sous la forme d'expressions linéaires de u que nous représenterons par

$$(21) \qquad X = A'u + A'', \qquad Y = B'u + B'', \qquad Z = C'u + C'', \quad (*)$$

A', B', C', A'', B'', C'' désignant des constantes qui seront évidemment dès lors des fonctions algébriques des arbitraires α, β, γ.

Ces préliminaires étant admis, revenons à présent à l'expression susmentionnée $\sum\limits_{\rho}\int\varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$, dont nous nous proposons de reconnaître la nature analytique, u_ρ désignant le radical $\sqrt{F(\rho)}$, lorsque, prenant pour φ une fonction rationnelle à la fois par rapport à ρ et à u_ρ, l'on supposera toujours les variables λ, μ, ν liées entre elles par les mêmes équations (5), U et V étant encore des constantes données.

Nous y arriverons aisément, à l'aide des résultats qui précèdent, en empruntant comme point de départ les conclusions de la

(*) Ces équations reproduisent, par le moyen de la *clef* indiquée dans la note de la page 157 ci-dessus, les trois premières équations (3) de la démonstration précitée de Jacobi (page 232 des *Vorlesungen*).

théorie classique déjà rappelée un peu plus haut, et qui se formulent, pour le cas du polynôme du cinquième degré $F(\rho) = u_\rho^2$, par l'égalité suivante (*) :

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \varphi(u_\rho, \rho) d\rho = \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \int \Phi_2(\rho)\, d\rho \\ + \int (A + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3) \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \sum_r \int \frac{R_r}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \text{const}, \end{aligned} \right.$$

Φ_1 et Φ_2 désignant deux fonctions rationnelles de ρ seule, et A, B, C, D, r, et R_r, étant des constantes déterminées, qui dépendent seulement, évidemment, des coefficients de φ et de F.

Partant de là, nous obtiendrons donc, en ajoutant les trois égalités semblables pour les trois hypothèses $\rho = \lambda, \mu, \nu$,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = \sum_\rho \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \sum_\rho \int \Phi_2(\rho) d\rho \\ + A \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + B \sum_\rho \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + C \sum_\rho \int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + D \sum_\rho \int \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} \\ + \sum_r R_r \left(\sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{F(\rho)}} \right) + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

expression dont nous connaissons la nature de tous les termes, en y supposant introduits les résultats précédemment acquis, sauf en ce qui concerne le dernier seulement.

Pour le calculer également, nous remarquerons que la différentielle de la quantité écrite entre parenthèses dans ce terme a pour valeur, en introduisant d'abord les quantités auxiliaires (7), puis tenant compte des expressions (8) et (9), et aussi de la relation (16),

---

(*) Voir, si l'on veut, à ce sujet, HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome I, pp. 294-295, ou bien JORDAN, *Idem*, Tome II, pages 30 et 35.

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{1}{\lambda-r}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{1}{\mu-r}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{1}{\nu-r}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}\\
&= \frac{1}{\lambda-r}\,\xi + \frac{1}{\mu-r}\,\eta + \frac{1}{\nu-r}\,\zeta = \frac{2d}{\Theta}\left(\frac{\mu-\nu}{r-\lambda} + \frac{\nu-\lambda}{r-\mu} + \frac{\lambda-\mu}{r-\nu}\right).du\\
&= \frac{2d}{\Theta}\,\frac{(\mu-\nu).(r-\mu)(r-\nu)+(\nu-\lambda).(r-\nu)(r-\lambda)+(\lambda-\mu).(r-\lambda)(r-\mu)}{(r-\lambda)(r-\mu)(r-\nu)}\,du\\
&= \frac{2d}{\Theta}\,\frac{(\mu-\nu)\,\mu\nu + (\nu-\lambda)\,\nu\lambda + (\lambda-\mu)\,\lambda\mu}{\mathcal{F}(r)}\,du,
\end{aligned}\right.$$

expression dont le numérateur n'est autre, ainsi qu'on le reconnaît tout de suite, que la valeur (9) de Θ changée de signe, et dont le dénominateur, qui est, d'après la définition (14) de la fonction $\mathcal{F}(\rho)$, et en tenant compte des valeurs (21),

$$\mathcal{F}(r) = -f(r)\left[\frac{(A'u+A'')^2}{a^2+r} + \frac{(B'u+B'')^2}{b^2+r} + \frac{(C'u+C'')^2}{c^2+r} - 1\right],$$

peut dès lors être présenté sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(25)\qquad \mathcal{F}(r) = G_r u^2 + 2H_r u + K_r = G_r(u-p_r)(u-q_r),$$

les coefficients G_r, H_r, K_r, ainsi que les deux racines p_r, q_r, qui sont par conséquent des fonctions algébriques de la constante envisagée r, dépendant de même algébriquement des constantes arbitraires α, β, γ, par l'intermédiaire des coefficients A', A''..., B', ... C'', d'après ce que nous avons dit plus haut (p. 163).

En tenant compte de ces deux observations, et prenant pour la quantité $\mathcal{F}(r)$ la seconde expression (25), comme la différentielle en question (24) se présentera alors sous la forme

$$\sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{2d}{G_r}\,\frac{-du}{(u-p_r)(u-q_r)} = \frac{-2d}{G_r(p_r-q_r)}\left(\frac{du}{u-p_r} - \frac{du}{u-q_r}\right),$$

on trouvera donc, en intégrant, eu égard aux deux valeurs

$$p_r = \frac{1}{G_r}\left(-H_r + \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right), \qquad q_r = \frac{1}{G_r}\left(-H_r - \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right),$$

pour l'expression que nous nous proposions de calculer :

$$(25^{\text{bis}})\qquad \sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{-d}{\sqrt{H_r^2 - G_r K_r}} \log \frac{u - p_r}{u - q_r} + \text{const.}$$

Et dès lors, en remettant au second membre de l'égalité (23) cette dernière valeur, ainsi que celles indiquées par les quatre équations (3) et (11), puis représentant alors, pour simplifier, par W la constante arbitraire $W = AW_1 + BW_2$, et désignant enfin à nouveau par C la constante introduite par la quadrature considérée, l'on voit que l'expression en question se présentera sous la forme

$$(26)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho) d\rho = C + \sum_\rho \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \sum_\rho \int \Phi_2(\rho) d\rho + W \\ + \mathcal{A} u^3 + \mathcal{B} u^2 + \mathcal{C} u + \mathcal{D} - \sum_r \frac{R_r d}{\sqrt{H_r^2 - G_r K_r}} \log \frac{u - p_r}{u - q_r}, \end{aligned} \right.$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ étant des constantes, ou dépendant algébriquement de α, β, γ, d'après la première égalité (11), de même que G_r, H_r, K_r, p_r, et q_r, et la constante d'intégration C devant évidemment, pour la plus grande généralité possible, être envisagée comme dépendant d'une façon tout à fait indéterminée des différentes constantes qui entrent dans les autres termes du même développement, c'est-à-dire, par conséquent, en particulier des arbitraires α, β, γ.

Si l'on tient compte alors de l'équation (6), ainsi que des définitions [formules (65) de la Note III] des symboles X, Y, Z, et si l'on se rappelle en outre la nature analytique de l'intégrale de toute fonction rationnelle, on aperçoit alors de suite que le développement précédent comprendra, en sus de la constante d'intégration C, des termes de deux catégories différentes, les uns simplement algébriques en λ, μ, ν, et les autres logarithmiques; car, après avoir remis au second membre de l'égalité (26), à la place du troisième terme, la valeur qui résulterait du calcul effectif de chaque quadrature, savoir

$$(27)\qquad \sum_\rho \int \Phi_2(\rho) d\rho = \sum_\rho \Phi_3(\rho) + \sum_c \sum_\rho C_c \log(\rho - c),$$

Φ_3 désignant encore une fonction rationnelle, il est bien clair que la partie rationnelle de cette dernière valeur étant réunie au second terme du développement (26) ainsi qu'au polynome en u, formera une première partie algébrique en λ, μ, ν, et que semblablement les termes logarithmiques de cette même valeur (27), étant réunis à ceux figurés par le dernier terme du même développement, formeront au second membre de cette égalité (26) une seconde partie de même nature : de telle sorte que, finalement, le résultat auquel nous venons d'arriver affectera en résumé la forme suivante

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int^{\bullet} \varphi(u_\rho, \rho) d\rho &= \psi(\alpha, \beta, \gamma) + \Psi(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) \\ &+ \sum_i \psi_i(\alpha, \beta, \gamma) \log \Psi_i(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \right.$$

la fonction ψ étant, comme nous l'avons dit, complètement indéterminée, et les trois symboles Ψ, ψ_i, et Ψ_i désignant à présent trois fonctions simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui figurent dans leur algorithme (*).

Ce résultat, toutefois, n'offre encore que peu d'intérêt sous sa forme actuelle, et n'est susceptible ainsi d'aucune conclusion

(*) La formule de réduction en éléments simples de toute intégrale hyperelliptique (22), sur laquelle nous avons basé notre démonstration, n'est pas indispensable, en réalité, pour arriver au résultat (28) que nous venons d'établir. On peut également y parvenir sans supposer la connaissance de cette formule, dont la démonstration est longue et laborieuse, et que l'on ne trouve pas dans tous les traités d'Analyse, en invoquant à la place les propriétés connues des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique, et empruntant seulement à la théorie précitée, relative aux intégrales hyperelliptiques, la proposition très simple, établie en quelques mots, qui en forme le point de départ, et consistant en ce que « toute fonction $\varphi(u_\rho, \rho)$, rationnelle à la fois par rapport à ρ et » à $u_\rho = \sqrt{F(\rho)}$, peut être mise sous la forme $\Phi_1(\rho) + \frac{\Phi_2(\rho)}{\sqrt{F(\rho)}}$, Φ_1 et Φ_2 étant deux fonc- » tions rationnelles de ρ. »

En effet, ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 donnant naissance à des développements tels que

$$\int^{\bullet} \Phi_1(\rho) d\rho = \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \log(\rho - c), \qquad \Phi_2(\rho) = \sum_m P_m \rho^m + \sum_{n,r} \frac{Q_{n,r}}{(\rho - r)^n},$$

Φ_3 désignant une nouvelle fonction rationnelle, et c, r, C_c, P_m, $Q_{n,r}$, étant des constantes

pratique, parce que, dans cette dernière égalité, une seule des trois variables λ, μ, ν, demeure arbitraire, ν par exemple, ainsi que deux des constantes α, β, γ, du moment que, par hypothèse, ces constantes, d'une part, satisfont à la relation (18), et les variables λ, μ, ν, d'autre part, aux deux équations (5) dans lesquelles U et V sont de même des constantes données. Il

---

faciles à déterminer, l'on trouvera donc successivement, en partant de la proposition que nous venons de rappeler,

$$\int \varphi(u_\rho, \rho)\,d\rho = \int \left[\Phi_1(\rho) + \frac{\Phi_2(\rho)}{\sqrt{F(\rho)}}\right] d\rho$$

$$= \int \Phi_1(\rho)\,d\rho + \int \left[\sum_m P_m \rho^m + \sum_{n,r} \frac{Q_{n,r}}{(\rho - r)^n}\right] \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$$

$$= \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \log(\rho - c) + \sum_m P_m \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$$

$$+ \sum_{n,r} Q_{n,r} \int (\rho - r)^n \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \text{const.},$$

et nous obtiendrons par conséquent, en ajoutant les trois égalités semblables pour les trois valeurs $\rho = \lambda, \mu, \nu$, et désignant par C la constante d'intégration,

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\,d\rho = C + \sum_\rho \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \sum_\rho \log(\rho - c) \\ + \sum_m P_m \left(\sum_\rho \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \sum_{n,r} Q_{n,r} \left(\sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)^n \sqrt{F(\rho)}}\right). \end{aligned} \right.$$

La question se réduit donc à reconnaître la nature analytique de chacune des deux expressions écrites entre parenthèses qui figurent dans les deux derniers termes de ce développement. Or, rien n'est plus facile, en se basant sur les résultats antérieurement acquis.

En effet, elles ont respectivement pour différentielles

$$(\beta) \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{\lambda^m d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{\mu^m d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{\nu^m d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}, \\ \sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho - r)^n \sqrt{F(\rho)}} &= \frac{d\lambda}{(\lambda - r)^n \sqrt{F(\lambda)}} + \frac{d\mu}{(\mu - r)^n \sqrt{F(\mu)}} + \frac{d\nu}{(\nu - r)^n \sqrt{F(\nu)}}, \end{aligned} \right.$$

acquerra, au contraire, une signification et une portée considérables, si on le transforme par le moyen des deux opérations que nous allons dire, auxquelles on se trouve tout naturellement

---

quantités qui, étant récrites à l'aide des variables auxiliaires (7), deviendront, eu égard aux valeurs obtenues plus haut (8) et (9),

$$(\gamma)\quad\left\{\begin{aligned}\sum_\rho \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \lambda^m\xi + \mu^m\eta + \nu^m\zeta \\ &= \frac{2d}{\Theta}\left[(\nu-\mu)\lambda^m + (\lambda-\nu)\mu^m + (\mu-\lambda)\nu^m\right] du \\ \sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)^n\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{\xi}{(\lambda-r)^n} + \frac{\eta}{(\mu-r)^n} + \frac{\zeta}{(\nu-r)^n} \\ &= \frac{2d}{\Theta}\left[\frac{\nu-\mu}{(\lambda-r)^n} + \frac{\lambda-\nu}{(\mu-r)^n} + \frac{\mu-\lambda}{(\nu-r)^n}\right] du,\end{aligned}\right.$$

et représenteront dès lors, comme l'on voit, deux fonctions symétriques des racines λ, μ, ν de l'équation (15) ou (13).

Pour la première, cette fonction est entière, car le facteur entre crochets peut être écrit, en changeant son signe,

$$\begin{aligned}(\mu-\nu)\lambda^m + (\nu-\lambda)\mu^m + (\lambda-\mu)\nu^m &= (\mu-\nu)\lambda^m - \lambda(\mu^m-\nu^m) + \nu\mu^m - \mu\nu^m \\ &= (\mu-\nu)\lambda^m - \lambda(\mu^m-\nu^m) + \mu\nu(\mu^{m-1}-\nu^{m-1}),\end{aligned}$$

expression dont chacun des trois termes est divisible isolément par $\mu - \nu$. Dès lors, étant symétrique en λ, μ, ν, du moment qu'elle admet le facteur $\mu-\nu$, elle admet forcément par cela même les deux autres facteurs homologues $\nu - \lambda$ et $\lambda - \mu$, et par conséquent le facteur Θ (9).

La première des deux différentielles (6) étant ainsi une fonction entière symétrique des trois racines λ, μ, ν, est donc, en vertu de la propriété rappelée tout à l'heure, une fonction entière des coefficients de l'équation (15), c'est-à-dire, par conséquent, d'après les valeurs (21), une fonction entière de u dont les coefficients dépendent algébriquement de α, β, γ; et dès lors il en sera de même de son intégrale, c'est-à-dire de la première des deux expressions envisagées, laquelle, eu égard à l'équation (6), se trouve ainsi être une fonction algébrique à la fois de λ, μ, ν, et de α, β, γ. C'est le résultat déjà reconnu un peu plus haut (pp. 159-160), en invoquant la formule de décomposition des intégrales hyperelliptiques que nous nous proposons d'éviter dans cette note.

De même, pour la seconde des différentielles (γ) ou (6), le facteur entre crochets étant visiblement une fonction rationnelle symétrique des mêmes racines λ, μ, ν, sera par conséquent aussi une fonction rationnelle de la variable u, dont les coefficients dépendront encore algébriquement de α, β, γ. Son intégrale par rapport à u, c'est-à-dire la seconde des deux expressions à calculer, sera donc celle d'une différentielle rationnelle de u : d'où il suit qu'elle se composera d'une partie rationnelle en u, et d'une somme de termes logarithmiques tels que $C_i \log(u - c)$, dont tous les coefficients, tant d'une partie que de l'autre, seront toujours des fonctions simplement algébriques des arbitraires α, β, γ.

En reportant les deux valeurs ainsi obtenues pour les deux intégrales des différen-

conduit, si l'on cherche à obtenir une interprétation plus claire et plus symétrique de cette même égalité (28).

1° Nous y introduirons, comme constantes arbitraires, à la

---

tielles (β) dans les deux derniers termes du second membre de l'égalité (α), puis cela fait, réunissant ensemble, séparément, d'une part, les parties entières et rationnelles en u, et d'autre part tous les différents termes logarithmiques, il est clair alors que nous obtiendrons pour l'expression en question (α) un développement tel que

$$(\delta) \quad \sum_\rho \int^\rho \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = C + \sum_\rho \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \sum_\rho \log(\rho - c) + \Phi(u) + \sum_i C_i \log(u - c_i),$$

Φ désignant une fonction rationnelle complètement déterminée dont tous les coefficients, de même que les C_i et c_i, dépendront algébriquement de α, β, γ, tandis que la constante d'intégration C devra évidemment, pour la plus grande généralité, être envisagée comme dépendant, au contraire, d'une façon indéterminée de toutes les constantes qui entrent dans l'expression intégrée, c'est-à-dire en particulier de α, β, γ.

En remettant donc dans le second membre de l'égalité (δ), à la place de u, sa valeur tirée de l'équation (6), et ayant égard aux valeurs de X, Y, Z, nous trouverons dès lors pour cette même quantité une expression de la forme

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int^\rho \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho &= \psi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &+ \Psi(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) + \sum_i \psi_i(\alpha, \beta, \gamma) \log \Psi_i(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \right.$$

la fonction ψ étant donc complètement indéterminée, et les symboles Ψ, ψ_i, et Ψ_i désignant cette fois trois fonctions simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui y figurent : ce qui est précisément le résultat auquel nous arrivons dans le texte, en partant de la formule de décomposition des intégrales hyperelliptiques.

Toutefois, bien que cette démonstration, ainsi présentée, soit aussi satisfaisante que celle développée ci-dessus, elle n'éclaire pas cependant la question d'un jour aussi complet, en ce qu'elle ne fait pas voir avec certitude, comme elle, que lorsque l'intégrale $\int^\rho \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$ contiendra des intégrales de troisième espèce, la partie logarithmique existera alors forcément dans le second membre de la formule (ε) ou (28), et par suite aussi ultérieurement dans celle (32) du théorème d'Abel. Car, en supposant que dans la fonction rationnelle $\Phi_1(\rho)$, ainsi que dans celle en u dans laquelle se sera transformé, par le procédé que nous avons dit, le second membre de la seconde équation (γ), l'on ait fait apparaître, par la division algébrique, la partie entière, si, après cette opération, les parties rationnelles restantes sont telles l'une et l'autre que le degré de leur dénominateur surpasse d'au moins deux unités celui de leur numérateur (et rien ne montre qu'il n'en sera pas ainsi), il pourra parfaitement arriver (on doit au moins le penser en l'absence de toute raison contraire) que les intégrales des deux fonctions rationnelles précitées soient purement rationnelles, en ρ, ou u, auquel cas les termes logarithmiques feront évidemment défaut, du même coup, dans le second membre des formules (δ) et (ε) : éventualité que ne comporte pas au contraire la démonstration exposée dans le texte, pour la même hypothèse de la présence d'intégrales de troisième espèce dans l'intégrale hyperelliptique proposée.

place de α, β, γ, les valeurs particulières λ_0, μ_0 de λ et μ, correspondant, en vertu des deux équations (5) ou (19), à une valeur *numérique* arbitraire ν_0 de la variable ν (0 par exemple). Pour cela, il suffira de faire $\nu = \nu_0$ dans ces deux équations (19), puis de résoudre alors par rapport à α, β, γ les trois équations dont on aura par là la disposition, savoir

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ &(\gamma Y_0 - \beta Z_0)^2 + (\alpha Z_0 - \gamma X_0)^2 + (\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 \\ &\qquad = (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2 - U, \\ &a^2(\gamma Y_0 - \beta Z_0)^2 + b^2(\alpha Z_0 - \gamma X_0)^2 + c^2(\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 \\ &\qquad = b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 - V, \end{aligned} \right.$$

X_0, Y_0, Z_0 étant ce que deviennent les expressions (65), données dans la Note III pour X, Y, Z, lorsque l'on y écrit λ_0, μ_0, ν_0 respectivement à la place de λ, μ, ν ; et enfin, de remettre les valeurs algébriques ainsi obtenues à la place de α, β, γ dans ladite égalité (28), opération qui la transformera dès lors dans la suivante

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = \varpi(\lambda_0, \mu_0) + \Pi(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0)\ (*) \\ &\qquad + \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log \Pi_i(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0), \end{aligned} \right.$$

la fonction ϖ étant encore complètement arbitraire, et les symboles Π, ϖ_i, et Π_i désignant de nouveau trois fonctions algébriques par rapport à toutes les quantités qui y figurent.

D'ailleurs, si l'on élimine en même temps, par un procédé quelconque, les mêmes quantités α, β, γ entre les trois équations précédentes (29) et les deux équations primitives (5) ou (19), comme celles-ci se trouveront alors remplacées par deux équa-

---

(*) Nous n'écrivons pas ν_0 dans l'algorithme de ces équations, non plus que dans les suivantes, parce que, par hypothèse, cette quantité n'est plus, comme λ_0, μ_0, un paramètre variable (pouvant par suite être considéré comme fonction de λ, μ, ν), mais un *nombre fixe* quoique arbitraire.

tions algébriques dont nous indiquerons plus loin la forme explicite, et que nous représenterons en attendant par

$$(31) \qquad \mathcal{F}_1(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) = 0, \qquad \mathcal{F}_2(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) = 0,$$

ou bien par

$$(31^{\text{bis}}) \qquad F_1(X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0) = 0, \qquad F_2(X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0) = 0,$$

suivant que l'on aura adopté la forme (5) ou la forme (19) pour les équations précitées, il séra donc plus symétrique et plus rationnel de considérer dorénavant, non seulement dans ces deux dernières équations, mais aussi dans l'égalité en question (30), λ, μ, ν comme arbitraires, et λ_0, μ_0 comme deux fonctions de ces variables déterminées par ces deux mêmes équations.

2° Nous éliminerons alors, par simple soustraction, la constante d'intégration $C = \varpi(\lambda_0, \mu_0)$ (qui, étant une fonction indéterminée de λ_0, μ_0, pourrait introduire ces variables sous forme transcendante), entre l'équation obtenue tout à l'heure (30) et celle que l'on en déduira en faisant $\nu = \nu_0$, savoir

$$\sum_{\rho_0} \int \varphi(u_{\rho_0}, \rho_0)\, d\rho_0 = \varpi(\lambda_0, \mu_0) + \Pi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_0, \mu_0)$$
$$+ \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log \Pi_i(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_0, \mu_0),$$

ce qui conduira définitivement à l'égalité

$$\sum_{\rho} \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho - \sum_{\rho_0} \int \varphi(u_{\rho_0}, \rho_0)\, d\rho_0$$
$$= \mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) + \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log F_i(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0),$$

dans laquelle, les limites supérieures λ, μ, ν des intégrales de la première somme demeurant arbitraires ainsi que les limites inférieures, supposées constantes, de toutes les intégrales envisagées, λ_0, μ_0 désignent par hypothèse les fonctions de ces variables déterminées par les deux équations (31), et $\mathcal{F}$, ϖ_i, et F_i

désignent de nouveau des fonctions simplement algébriques de toutes ces différentes quantités.

Si l'on fait attention que les deux équations algébriques (31), non linéaires en λ_0, μ_0, ne suffisent pas à déterminer entièrement à elles seules ces deux quantités, et qu'il resterait, pour une précision complète, à définir, à l'aide de considérations accessoires, le chemin décrit par chacune de ces variables λ_0, μ_0, pour chaque chemin arbitrairement choisi des variables indépendantes λ, μ, ν, l'on voit que le signe de chacune des deux différentielles $d\rho_0$, demeure en réalité, jusqu'à plus ample explication, indéterminé dans l'équation précédente, car il est évident que, pour un même élément de chemin décrit par la variable ρ_0, le signe de la différentielle $d\rho_0$ changera suivant le sens dans lequel cet élément sera décrit. Nous n'aborderons pas dans cette Note ce dernier point de la question, nous bornant à faire observer qu'en raison de cette réserve, la même égalité que nous venons d'obtenir pourra aussi bien être écrite en affectant du signe $+$, au lieu du signe $-$, la seconde somme du premier membre.

Sous le bénéfice de cette observation essentielle, nous pourrons maintenant formuler l'énoncé suivant, que nous croyons avoir démontré complètement par les calculs qui précèdent, et qui concorde exactement, pour l'équation algébrique envisagée (12), avec celui que l'on donne généralement du théorème d'Abel (*) :

THÉORÈME. — *Si l'on désigne, quel que soit* ρ, *par* u_ρ *la fonction de* ρ *définie par l'équation algébrique* $u^2 - F(\rho) = 0$, $F(\rho)$ *étant un polynôme du cinquième degré, n'admettant que des facteurs simples, mais quelconque d'ailleurs, équation que l'on pourra évidemment, en réunissant ensemble deux de ces facteurs, toujours présenter sous la forme*

$$u_\rho^2 - (\rho + a^2)(\rho + b^2)(\rho + c^2)(\rho^2 + U\rho + V) = 0;$$

(*) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 348, pages 347-349.

par $\varphi(u_\rho, \rho)$ *une fonction rationnelle à la fois par rapport à* ρ *et à* u_ρ; *et enfin par* λ_0, μ_0 *les deux fonctions de* λ, μ, ν *déterminées par les deux équations algébriques* (31) *ou* (31bis), *l'on aura, quels que soient les valeurs finales de* λ, μ, ν, *et les chemins décrits par ces variables (les valeurs initiales étant également arbitraires, mais fixes), en choisissant convenablement le sens des chemins décrits sous ces conditions par les variables* λ_0 *et* μ_0, *l'on aura, disons-nous, l'égalité*

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\varphi(u_\lambda,\lambda)d\lambda+\int\varphi(u_\mu,\mu)d\mu+\int\varphi(u_\nu,\nu)d\nu+\int\varphi(u_{\lambda_0},\lambda_0)d\lambda_0+\int\varphi(u_{\mu_0},\mu_0)d\mu_0\\&\qquad=\mathcal{F}(\lambda,\mu,\nu,\lambda_0,\mu_0)+\sum_i f_i(\lambda_0,\mu_0)\log F_i(\lambda,\mu,\nu,\lambda_0,\mu_0),\end{aligned}\right.$$

les trois fonctions $\mathcal{F}$, f_i, *et* F_i *étant trois fonctions complètement déterminées, simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui figurent dans leur algorithme.*

Nous calculerons effectivement, dans le paragraphe suivant, quoiqu'avec d'autres notations, les deux équations algébriques (31) ou (31bis) relatées dans l'énoncé qui précède, car les deux équations (40), dont il est question plus loin dans ce paragraphe, n'étant autres, en vertu de leur définition même, que lesdites équations (31bis), dans lesquelles on aurait écrit, par exemple, λ_1, μ_1, ν_1 à la place de λ, μ, ν, et λ_2, μ_2, ν_2 à la place de λ_0, μ_0, ν_0, il est bien clair dès lors, en se reportant à la forme explicite (48) que nous obtenons ultérieurement pour ces mêmes équations (40), que les équations en question (31bis) seront elles-mêmes les suivantes

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}&(YZ_0-ZY_0)^2+(ZX_0-XZ_0)^2+(XY_0-YX_0)^2\\&+\{U-(b^2+c^2)\}(X-X_0)^2+\{U-(c^2+a^2)\}(Y-Y_0)^2+\{U-(a^2+b^2)\}(Z-Z_0)^2=0,\\&a^2(YZ_0-ZY_0)^2+b^2(ZX_0-XZ_0)^2+c^2(XY_0-YX_0)^2\\&+(V-b^2c^2)(X-X_0)^2+(V-c^2a^2)(Y-Y_0)^2+(V-a^2b^2)(Z-Z_0)^2=0;\end{aligned}\right.$$

et il est très digne de remarque que cette forme explicite se trouve obtenue par cette voie beaucoup plus aisément qu'à l'aide

du procédé *théorique*, basé sur la considération d'intersections de courbes, sur lequel on a coutume de fonder, tant la démonstration que l'emploi, dudit théorème d'Abel (*).

La démonstration que nous venons de donner de la formule (32) permet d'apercevoir aisément, et d'une façon très claire, quelle forme particulière affectera son second membre dans chaque cas, suivant que l'on supposera le premier membre composé, d'intégrales hyperelliptiques de première espèce seulement, ou bien de première et de seconde espèce, ou enfin, comme cas le plus général, des trois espèces à la fois d'intégrales hyperelliptiques de même origine, nous voulons dire engendrées par la même irrationnelle $\sqrt{F(\rho)}$.

En effet, la réduction aux éléments les plus simples exprimée par la formule (22) n'étant évidemment possible, d'après les procédés mêmes à l'aide desquels on l'établit, que d'une seule manière pour la même fonction $\varphi(u_\rho, \rho)$, supposer que l'intégrale $\int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$ n'est composée que d'intégrales de première espèce, c'est donc admettre que le développement exprimé par la formule (22) se réduit au seul terme $\int (A + B\rho) \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, auquel cas celui exprimé par la formule suivante (23) se réduira manifestement à la valeur constante $C + AW_1 + BW_2 = C + W$. Et dès lors, il est clair que les deux opérations ci-dessus spéci-

---

(*) En suivant cette méthode, l'on aura à calculer d'abord l'équation du second degré

$$(\alpha) \qquad A\rho_0^2 + B\rho_0 + C = 0,$$

qui admet pour racines les deux fonctions λ_0 et μ_0, équation dont les trois coefficients A, B, C étant rationnels en $\lambda, \mu, \nu, u_\lambda, u_\mu, u_\nu$, (JORDAN, *Ibid*, § 348, p. 348, *en haut*) seront dès lors simplement algébriques en λ, μ, ν, après que l'on y aura remis, à la place de u_λ, u_μ, u_ν, leurs valeurs de définition

$$(\beta) \qquad u_\lambda = \sqrt{F(\lambda)}, \qquad u_\mu = \sqrt{F(\mu)}, \qquad u_\nu = \sqrt{F(\nu)}.$$

et qui fournira, par conséquent, de même que nos équations relatées ci-dessus (31), deux valeurs simplement algébriques des inconnues λ_0, μ_0, en fonction des variables λ, μ, ν. — Or, le calcul effectif de l'équation que nous venons de dire (α) sera beaucoup moins facile et moins symétrique que celui qui nous conduira dans le paragraphe suivant aux équations précitées (48), qui ne sont autres, sauf les notations, que lesdites équations demandées (31bis) ou (31).

fiées 1° et 2° (pages 170-172) conduiront à la valeur 0 pour le second membre de la formule (32), c'est-à-dire que dans ce premier cas, la partie algébrique et la partie logarithmique seront nulles à la fois.

Semblablement, supposer que la même intégrale n'est composée que d'intégrales de première et de seconde espèce, c'est admettre que le développement précité (22) se borne à son troisième terme seulement, auquel cas le suivant se réduira aux seuls termes $C + W + \mathcal{A}u^3 + \mathcal{B}u^2 + \mathcal{C}u + \mathcal{D}$, et par suite encore celui d'après (23) à ses deux premiers termes : d'où il résulte évidemment, qu'après les susdites opérations 1° et 2° réalisées, le second membre de la formule (32) se réduira simplement à la seule partie algébrique $\mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0)$.

Enfin, l'on voit tout aussi clairement que lorsque l'intégrale en question renfermera dans son expression (22) une ou plusieurs intégrales de troisième espèce, il existera dès lors forcément, dans chacun des développements (23), (26), et (28), autant de termes correspondants compris dans la dernière somme des seconds membres de ces équations, c'est-à-dire que la partie logarithmique *existera* nécessairement au second membre de la formule envisagée (32).

La propriété remarquable que nous venons d'établir s'applique en réalité, non seulement aux intégrales hyperelliptiques à propos desquelles nous l'avons démontrée, mais encore à toutes les intégrales analogues $\int \varphi (u_\rho, \rho)\, d\rho$, φ désignant toujours une fonction doublement rationnelle, en prenant alors pour la fonction u_ρ toute fonction algébrique de ρ, c'est-à-dire en supposant cette fonction définie par l'équation la plus générale $F(u_\rho, \rho) = 0$, entière à la fois par rapport à ρ et à u_ρ : intégrales auxquelles on a donné le nom d'*intégrales abéliennes* en raison de cette propriété commune, et aussi à titre d'hommage à la mémoire de l'illustre Géomètre qui l'a découverte, et qui a ainsi posé le premier les fondements de leur théorie.

Ce fait étant admis, les caractères que nous venons de reconnaître au second membre de la formule (32), suivant que son premier membre se compose d'intégrales hyperelliptiques de pre-

mière espèce seulement, ou de première et de seconde espèce, ou qu'il y entre des intégrales de troisième espèce, pourront servir alors, par voie d'extension, de base pour la classification des intégrales abéliennes en général, et c'est justement pour cela que nous avons tenu à les faire ressortir avec évidence tout à l'heure; c'est-à-dire qu'une intégrale semblable $\int \varphi (u_\rho, \rho)\, d\rho$ sera dite, ou bien de première espèce si, relativement à elle, le second membre de la formule (32) se réduit à zéro; ou bien de seconde espèce, s'il se réduit à une fonction simplement algébrique des variables ρ; ou enfin, de troisième espèce, s'il existe dans ce second membre une partie logarithmique.

II

Nous allons indiquer maintenant une application importante que l'on pourra faire des résultats qui précèdent.

Désignant de nouveau par $F(\rho)$ un polynôme du cinquième degré, n'admettant que des facteurs simples, mais quelconque d'ailleurs, supposons que nous ayons marqué sur le plan représentatif de la variable imaginaire ρ les cinq points qui seront les affixes des cinq racines de l'équation $F(\rho) = 0$; et comme, parmi ces cinq points, l'on pourra toujours évidemment en prendre trois, que nous marquerons A, B, C, de telle façon que les deux autres, marqués D et E, soient situés en dehors du triangle ABC, représentons par $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ les trois racines correspondant respectivement aux trois affixes A, B, C ainsi spécifiées, par U et V la somme et le produit des deux autres racines changées de signe, enfin par ρ_0 une constante arbitrairement choisie sous la seule condition que son affixe R soit située à l'intérieur du triangle ABC.

Ayant admis ces définitions qui permettront, en particulier, de mettre encore le polynôme $F(\rho)$ sous la forme déjà considérée tout à l'heure

$$F(\rho) = f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V), \tag{34}$$

supposons que l'on se propose d'étudier les deux fonctions bien déterminées des variables indépendantes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ (*)

$$(35)\qquad x = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \qquad y = \psi(\bar{u}, \bar{v}),$$

définies par les deux équations transcendantes

$$(35^{\text{bis}})\qquad \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \bar{u}, \qquad \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \bar{v},$$

auxquelles on attribue la dénomination de fonctions hyperelliptiques de la *première classe,* et qui, dans la succession naturelle des transcendantes engendrées par l'opération de la quadrature, sont celles qui s'offrent immédiatement après les fonctions elliptiques.

Dans cette pensée, considérant seulement, pour un instant, les intégrales rectilignes relatives aux cinq droites RA, RB, RC, RD, RE, désignons simultanément par $\overline{\omega'}$ l'une quelconque de ces intégrales pour le premier type de quadrature $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, et par $\overline{\omega''}$ l'intégrale correspondant à la même droite pour le second type $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$; et de même, représentons par $\overline{\Omega'}$ une somme de multiples quelconques des périodes pour le premier de ces types, et par $\overline{\Omega''}$ la quantité analogue, c'est-à-dire la somme des mêmes multiples des périodes correspondantes pour le second type en question.

Ces nouvelles définitions étant admises également, si l'on convient, pour plus de clarté, d'écrire dorénavant entre parenthèses les intégrales supposées expressément rectilignes, l'on aura, comme on le sait, pour un même chemin quelconque

(*) Voir à ce sujet, si l'on veut, un Mémoire important de JACOBI inséré au *Journal de Crelle.* (Tome XIII, p. 55.)

allant du point fixe ρ_0 au point variable ρ, les deux égalités connexes (*)

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \overline{\Omega'} + \overline{2\omega'} - \left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ &\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \overline{\Omega''} + \overline{2\omega''} - \left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où il suit que les équations envisagées tout à l'heure (35bis) équivaudront à celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \left[\overline{\Omega'} + \overline{2\omega'} - \left(\int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)\right] = \overline{u}, \\ &\int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \left[\overline{\Omega''} + \overline{2\omega''} - \left(\int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)\right] = \overline{v}, \end{aligned}\right.$$

et pourront par conséquent être écrites tout aussi bien, en retranchant la quantité $\overline{2\omega'}$ des deux membres de la première, et de même la quantité $\overline{2\omega''}$ des deux membres de la seconde :

$$(35^{ter}) \quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \overline{u} - \overline{2\omega'}, \\ &\int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \overline{v} - \overline{2\omega''}. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, si l'on introduit à présent la considération des deux nouvelles fonctions, analogues aux précédentes φ et ψ (35),

$$(36) \qquad x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v),$$

(*) Voir, si l'on veut, Briot et Bouquet, *Traité des Fonctions Elliptiques*, § 113, page 185, *en haut*.

définies cette fois par les deux autres équations transcendantes, qui ne diffèrent des précédentes (35bis) que par le signe de la seconde intégrale des premiers membres et le symbole adopté pour les variables indépendantes, savoir

$$(36^{\text{bis}})\quad \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = u, \qquad \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = v,$$

les périodes de ces fonctions Φ et Ψ étant encore évidemment celles des fonctions φ et ψ (*), les équations qui précèdent (35ter) donneront donc, avec ces nouvelles définitions,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \Phi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ y = \Psi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \end{array} \right.$$

égalités dans lesquelles x et y désignent toujours, par hypothèse, respectivement les mêmes valeurs que dans les équations antérieures, et qui, fourniront dès lors, étant rapprochées de celles posées en premier lieu (35), les relations

$$(37)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\overline{u}, \overline{v}) = \Phi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ \psi(\overline{u}, \overline{v}) = \Psi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \end{array} \right.$$

à l'aide desquelles l'étude des fonctions considérées de prime abord φ et ψ se trouve ainsi ramenée à celle des fonctions Φ et Ψ que l'on vient d'introduire. Or, la propriété fondamentale de celles-ci ressortira, comme on va le voir, de nos théories exposées précédemment, à l'aide de calculs beaucoup plus commodes et plus symétriques.

En effet, appelons $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ deux systèmes de

(*) Voir à ce sujet PUISEUX, *Recherches sur les Fonctions Algébriques*, § 58, *Journal de Liouville* (Tome XV, pp. 463-465).

valeurs des variables λ, μ, ν astreints à la seule condition de vérifier tous deux, pour un même choix des constantes arbitraires, les deux équations intégrales que nous avons obtenues entre ces variables dans la théorie ci-dessus, soit sous la forme transcendante des deux premières équations (3), soit sous la forme algébrique (5) ou (19); c'est-à-dire que, par hypothèse, nous aurons à la fois, toujours avec le même mode de notation condensée, d'une part

$$(38)\quad \begin{cases} \sum_{\rho_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, & \sum_{\rho_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \\ \sum_{\rho_2} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, & \sum_{\rho_2} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \end{cases}$$

et d'autre part les quatre égalités

$$(38^{\text{bis}})\quad \begin{cases} (\gamma Y_1 - \beta Z_1)^2 + (\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + (\beta X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] + U = 0, \\ a^2(\gamma Y_1 - \beta Z_1)^2 + b^2(\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + c^2(\beta X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2) + V = 0, \\ (\gamma Y_2 - \beta Z_2)^2 + (\alpha Z_2 - \gamma X_2)^2 + (\beta X_2 - \alpha Y_2)^2 \\ \qquad - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] + U = 0, \\ a^2(\gamma Y_2 - \beta Z_2)^2 + b^2(\alpha Z_2 - \gamma X_2)^2 + c^2(\beta X_2 - \alpha Y_2)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2) + V = 0 \end{cases}$$

$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ étant ce que deviennent respectivement les expressions (65) de la Note III pour les deux systèmes de valeurs considérés des variables λ, μ, ν.

On obtiendra donc, en éliminant par simple soustraction les constantes arbitraires W_1 et W_2 entre les quatre équations transcendantes (38),

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{\rho}\left(\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}-\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0,\\
&\sum_{\rho}\left(\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}-\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0,
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose sous forme explicite, en séparant en deux membres :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\right)+\left(\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}\right)\\
&\qquad=\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}},\\
&\left(\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\right)+\left(\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}\right)\\
&\qquad=\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}.
\end{aligned}\right.$$

Semblablement, en éliminant, à l'aide des procédés classiques, les trois arbitraires α, β, γ entre les quatre équations algébriques (38bis) et la condition (18) posée en introduisant ces constantes, équations qui sont toutes entières et du second degré par rapport à ces mêmes quantités, l'on obtiendra deux nouvelles équations, complètement analogues à celles (31bis) du paragraphe précédent, et que nous représenterons en conséquence par

$$(40)\qquad F_1(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)=0, \qquad F_2(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)=0,$$

les symboles F_1 et F_2 désignant de nouveau, par hypothèse, les deux mêmes fonctions, entières par rapport aux six quantités X, Y, Z dont elles dépendent, qui figurent déjà dans lesdites équations (31bis), équations que nous calculerons effectivement tout à l'heure, ainsi que nous l'avons déjà annoncé.

Ces préliminaires étant admis, si l'on convient de faire à présent

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}=u_1, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}=v_1,\\ \displaystyle\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}=u_2, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}=v_2,\end{cases}$$

auquel cas les équations ci-dessus (39), pourront s'écrire, en renversant dans chacune les deux membres,

$$(42)\quad \int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=u_1+u_2,\qquad \int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=v_1+v_2,$$

il est clair que l'on aura simultanément, d'après les définitions exprimées par les égalités (36)-(36bis),

$$(43)\quad \begin{cases} \lambda_1=\Phi(u_1,v_1), & \lambda_2=\Psi(u_1,v_1),\\ \mu_1=\Phi(u_2,v_2), & \mu_2=\Psi(u_2,v_2),\\ \nu_1=\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2), & \nu_2=\Phi(u_1+u_2,v_1+v_2);\end{cases}$$

et par conséquent, en remettant ces valeurs dans les expressions (65) de la Note III, prises successivement pour l'un et l'autre des deux systèmes de valeurs considérés des variables λ, μ, ν, l'on obtiendra ces expressions :

$$(44)\quad \begin{cases} X_1=\sqrt{\dfrac{[a^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[a^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[a^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\\ Y_1=\sqrt{\dfrac{[b^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[b^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[b^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},\\ Z_1=\sqrt{\dfrac{[c^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[c^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[c^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}},\end{cases}$$

$$(44^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} X_2 &= \sqrt{\frac{[a^2+\Psi(u_1, v_1)][a^2+\Psi(u_2, v_2)][a^2+\Phi(u_1+u_2, v_1+v_2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\\ Y_2 &= \sqrt{\frac{[b^2+\Psi(u_1, v_1)][b^2+\Psi(u_2, v_2)][b^2+\Phi(u_1+u_2, v_1+v_2)]}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},\\ Z_2 &= \sqrt{\frac{[c^2+\Psi(u_1, v_1)][c^2+\Psi(u_2, v_2)][c^2+\Phi(u_1+u_2, v_1+v_2)]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}. \end{aligned}\right.$$

En supposant donc calculées, de la façon que nous avons dit tout à l'heure, les deux équations représentées par les deux ci-dessus (40), et y remettant maintenant à la place des X, Y, Z les valeurs que nous venons d'écrire, ces deux équations seront alors, comme on voit, deux relations algébriques entre les deux fonctions

$$(45)\qquad \Phi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),\qquad \Psi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),$$

relatives à la somme des arguments quelconques $(u_1,\ u_2)$, $(v_1,\ v_2)$ (*), et les quatre fonctions semblables

$$\Phi(u_1, v_1),\qquad \Phi(u_2, v_2),\qquad \Psi(u_1, v_1),\qquad \Psi(u_2, v_2),$$

relatives à ces arguments eux-mêmes, relations qui détermineront dès lors les deux premières en fonction des quatre autres.

Ce seront par conséquent les *formules d'addition* de nos deux fonctions hyperelliptiques Φ et Ψ, définies par les équations (36) et (36bis).

(*) Les quatre arguments u_1, v_1, u_2, v_2 sont en réalité complètement indépendants les uns des autres, et doivent être considérés dès lors comme entièrement arbitraires, car il est facile de voir qu'il en est bien ainsi des quatre fonctions inverses de celles-là d'après les équations de définition (41), savoir λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2. En effet, entre les neuf quantités $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$, les calculs antérieurs établissent seulement les cinq relations distinctes (18) et (38bis), d'où il suit que *quatre* d'entre elles demeurent complètement arbitraires, et rien n'empêche évidemment de prendre pour ces quatre là les quantités λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 : auquel cas les équations précitées (41) montrent alors que u_1 et v_1 d'une part, puis u_2 et v_2 d'autre part, seront elles-mêmes entièrement arbitraires.

Si l'on veut posséder sous forme explicite lesdites formules d'addition, toute la question se trouvera donc réduite désormais, d'abord à calculer effectivement les deux équations figurées dans les raisonnements qui précèdent par les deux équations (40), puis, après substitution à la place des X, Y, Z des valeurs (44) et (44bis), à les résoudre alors par rapport aux deux expressions (45). Nous allons, en conséquence, effectuer ici complètement la première de ces deux opérations, c'est-à-dire l'élimination des trois constantes α, β, γ entre les cinq équations (18) et (38bis); puis nous indiquerons dans quelles conditions se présentera la seconde, c'est-à-dire la résolution des équations ainsi obtenues ; et enfin nous vérifierons sur un exemple simple l'exactitude des résultats auxquels nous serons arrivés.

A. A cet effet, nous remarquerons tout d'abord que, dans le groupe d'équations (38bis), l'on pourra remplacer, soit les deux premières équations, soit les deux dernières, par deux autres en présence desquelles l'opération demandée deviendra alors beaucoup plus facile.

En effet, si nous introduisons de nouveau, pour un instant, comme dans le paragraphe précédent, les inconnues auxiliaires $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, ainsi que les constantes H et K définies respectivement par les formules (19bis) et (20bis), en ayant égard en même temps à la signification convenue des indices 1 et 2, il est clair que le système des cinq équations proposées (18) et (38bis) pourra être écrit à l'aide de ces différentes notations :

$$(46)\quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Z}_1^2 = \mathrm{H}, \qquad a^2\mathfrak{X}_1^2 + b^2\mathfrak{Y}_1^2 + c^2\mathfrak{Z}_1^2 = \mathrm{K}, \\ \mathfrak{X}_2^2 + \mathfrak{Y}_2^2 + \mathfrak{Z}_2^2 = \mathrm{H}, \qquad a^2\mathfrak{X}_2^2 + b^2\mathfrak{Y}_2^2 + c^2\mathfrak{Z}_2^2 = \mathrm{K}. \end{array} \right.$$

Or, ayant reconnu plus haut, à l'occasion du système (20ter), que les trois équations de gauche de ce système assignaient aux inconnues auxiliaires $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ des valeurs constantes déterminées

l'on aura, par conséquent, dans la question actuelle, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$; c'est-à-dire les trois équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma Y_1 - 6Z_1 = \gamma Y_2 - 6Z_2, & \alpha Z_1 - \gamma X_1 = \alpha Z_2 - \gamma X_2, \\ & 6X_1 - \alpha Y_1 = 6X_2 - \alpha Y_2, \end{array} \right.$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma (Y_1 - Y_2) = 6 (Z_1 - Z_2), & \alpha (Z_1 - Z_2) = \gamma (X_1 - X_2), \\ & 6 (X_1 - X_2) = \alpha (Y_1 - Y_2), \end{array} \right.$$

lesquelles, se réduisant manifestement à deux, tiendront lieu, par conséquent, soit de la seconde, soit de la troisième ligne d'équations du système précédent (46).

Substituant donc ces deux équations à celles de la dernière ligne de ce système, et tenant compte en même temps de la première, ainsi que des définitions précitées (19bis) et (20bis) des symboles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, H, et K, la question proposée sera donc ramenée à éliminer les trois constantes α, 6, γ entre les quatre équations, homogènes par rapport à ces quantités,

$$(47)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma Y_1 - 6Z_1)^2 + (\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + (6X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)6^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] + U(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2) = 0, \\ a^2(\gamma Y_1 - 6Z_1)^2 + b^2(\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + c^2(6X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2 6^2 + a^2b^2\gamma^2) + V(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2) = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\alpha}{X_1 - X_2} = \dfrac{6}{Y_1 - Y_2} = \dfrac{\gamma}{Z_1 - Z_2}, \end{array} \right.$$

opération dont le résultat s'obtiendra dès lors évidemment en remplaçant simplement dans les deux premières de ces équations les constantes $\alpha, 6, \gamma$ par les différences $X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2$, qui leur sont proportionnelles.

Or, cette substitution, supposée introduite dans les trois quantités $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$, donnant pour résultat, quant à la première,

l'expression suivante

$$\mathfrak{X}_1 = \gamma Y_1 - \beta Z_1 = (Z_1 - Z_2)Y_1 - (Y_1 - Y_2)Z_1 = -(Y_1Z_2 - Z_1Y_2),$$

et, par conséquent, pour leurs carrés, les trois valeurs

$$\mathfrak{X}_1^2 = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2, \quad \mathfrak{Y}_1^2 = (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2, \quad \mathfrak{Z}_1^2 = (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2,$$

en remettant dès lors ces expressions à la place des carrés qu'elles représentent dans les deux premières équations (47), puis effectuant la même substitution dans les autres termes de ces équations, l'on obtiendra donc définitivement, pour les équations (40) qu'il s'agissait de calculer, les deux suivantes

$$(48)\left\{\begin{aligned} &(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\ &+ \{U - (b^2+c^2)\}(X_1 - X_2)^2 + \{U - (c^2+a^2)\}(Y_1 - Y_2)^2 + \{U - (a^2+b^2)\}(Z_1 - Z_2)^2 = 0, \\ &a^2(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + b^2(Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + c^2(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\ &+ (V - b^2c^2)(X_1 - X_2)^2 + (V - c^2a^2)(Y_1 - Y_2)^2 + (V - a^2b^2)(Z_1 - Z_2)^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

lesquelles représentent ainsi, d'après ce que nous avons dit plus haut, sous une forme concrète très claire et très facile à saisir, les formules d'addition des fonctions hyperelliptiques (36)-(36bis), en entendant que les X, Y, Z y tiennent lieu des expressions (44) et (44bis).

Ces formules étant ainsi obtenues pour deux arguments de chaque sorte, on obtiendra par une simple opération algébrique celles relatives au cas de trois arguments : car ces formules (48) étant deux relations algébriques entre les six quantités

$$\left\{\begin{matrix} \Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), & & \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), & \\ \Phi(u_1, v_1), & \Phi(u_2, v_2), & \Psi(u_1, v_1), & \Psi(u_2, v_2), \end{matrix}\right.$$

fourniront, en y changeant u_2 en $u_2 + u_3$ et v_2 en $v_2 + v_3$, deux nouvelles relations algébriques correspondantes entre les six autres quantités

$$\left\{\begin{matrix} \Phi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), & & \Psi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), & \\ \Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), & \Phi(u_3, v_3), & \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), & \Psi(u_3, v_3); \end{matrix}\right.$$

et dès lors, en supposant ce nouveau système, ainsi que le précédent, ramenés tous deux à la forme entière, à l'aide des procédés et des formules que nous allons indiquer tout à l'heure, il est bien clair que le résultat de l'élimination entre ces quatre équations, par le moyen des procédés classiques, des deux seules quantités

$$\Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), \qquad \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

sera deux équations algébriques entre les huit quantités

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), & \Psi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), \\ \Phi(u_1, v_1), \quad \Phi(u_2, v_2), \quad \Phi(u_3, v_3), & \Psi(u_1, v_1), \quad \Psi(u_2, v_2), \quad \Psi(u_3, v_3), \end{array}\right.$$

c'est-à-dire précisément les formules d'addition des mêmes fonctions Φ et Ψ pour le cas de trois arguments.

Remarquons enfin que l'on déduira encore, si l'on veut, de ces mêmes formules (48), à l'aide d'une opération semblable, les formules analogues pour les fonctions hyperelliptiques habituellement considérées, c'est-à-dire celles définies par les équations (35)-(35bis), que nous avions posées en premier lieu.

En effet, si, en vue d'abréger les écritures, nous convenons, pour un instant, de représenter par le symbole ϖ l'une quelconque des deux fonctions φ et ψ, et semblablement par le symbole Π celle des deux fonctions Φ ou Ψ qui correspondra à celle-là en vertu des égalités (37), ces deux mêmes égalités donneront alors naissance, en les récrivant d'abord avec cette notation, puis en y faisant ensuite $\overline{u} - 2\overline{\omega}' = u$ et $\overline{v} - 2\overline{\omega}'' = v$, aux deux formules de transformation, inverses l'une de l'autre,

$$(48^{bis}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varpi(\overline{u}, \overline{v}) = \Pi(\overline{u} - \overline{2\omega'}, \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ \Pi(u, v) = \varpi(u + \overline{2\omega'}, v + \overline{2\omega''}). \end{array}\right.$$

Cela posé, $\overline{u}$, $\overline{v}$ d'une part, et u, v d'autre part, étant dans ces deux formules des variables quelconques, établissons à présent, d'une façon générale, entre ces deux systèmes d'arguments les relations

$$\overline{u} = u + \overline{\omega'}, \qquad \overline{v} = v + \overline{\omega''}, \qquad \text{ou} \qquad u = \overline{u} - \overline{\omega'}, \qquad v = \overline{v} - \overline{\omega''},$$

puis spécifions encore par les indices 1 et 2, dans chacun de ces systèmes d'arguments, deux valeurs, complètement arbitraires quant à l'un des systèmes, et satisfaisant par hypothèse aux dites relations que nous venons d'écrire. La considération de semblables valeurs donnant alors, en leur appliquant successivement les deux formules de transformation précédentes (48bis),

$$\left\{\begin{aligned}\varpi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}) &= \varpi\left[(u_1+\overline{\omega'})+(u_2+\overline{\omega'}),\ (v_1+\overline{\omega''})+(v_2+\overline{\omega''})\right]\\ &= \varpi\ (u_1+u_2+\overline{2\omega'},\ v_1+v_2+\overline{2\omega''})\\ &= \Pi\ (u_1+u_2,\ v_1+v_2),\\ \Pi(u,\ v) &= \varpi(u+\overline{2\omega'},\ v+\overline{2\omega''})\\ &= \varpi\left[(u+\overline{\omega'})+\overline{\omega'},\ (v+\overline{\omega''})+\overline{\omega''}\right] = \varpi(\overline{u}+\overline{\omega'},\ \overline{v}+\overline{\omega''}),\end{aligned}\right.$$

les formules d'addition (48) qui sont des relations algébriques entre les six quantités (eu égard à la double signification convenue du symbole Π)

$$\Pi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),\qquad \Pi(u_1,\ v_1),\qquad \Pi(u_2,\ v_2),$$

existeront donc aussi bien, en la même qualité, entre les six autres quantités, équivalentes à celles-là en vertu des deux dernières égalités que nous venons d'écrire,

$$\varpi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}),\qquad \varpi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}),\qquad \varpi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}).$$

Ce qui revient à dire que lesdites formules (48) constitueront en l'état un premier système algébrique dans lequel les valeurs des λ, μ, ν qui entrent dans les expressions des X, Y, Z seront respectivement :

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}\lambda_1 &= \varphi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}), & \lambda_2 &= \psi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}),\\ \mu_1 &= \varphi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}), & \mu_2 &= \psi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}),\\ \nu_1 &= \psi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}), & \nu_2 &= \varphi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}).\end{aligned}\right.$$

Ce système étant supposé écrit à cette place, faisons-y à présent, en premier lieu, $\overline{u_2}=0$, $\overline{v_2}=0$; nous obtiendrons ainsi un

second système algébrique qui sera encore le même système (48) dans lequel les λ, μ, ν auront alors les valeurs :

$$
\text{(II)} \left\{ \begin{array}{ll}
\lambda_1 = \varphi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), & \lambda_2 = \psi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), \\
\mu_1 = \varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), & \mu_2 = \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \\
\nu_1 = \psi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \nu_2 = \varphi(\overline{u_1}, \overline{v_1}).
\end{array} \right.
$$

Enfin dans le même système spécifié en premier lieu tout à l'heure, introduisons semblablement l'hypothèse $\overline{u_1} = 0, \overline{v_1} = 0$; le nouveau système algébrique ainsi produit sera dès lors le système (48) dans lequel les λ, μ, ν tiendront lieu cette fois des troisièmes valeurs :

$$
\text{(III)} \left\{ \begin{array}{ll}
\lambda_1 = \varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), & \lambda_2 = \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \\
\mu_1 = \varphi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}), & \mu_2 = \psi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}), \\
\nu_1 = \psi(\overline{u_2}, \overline{v_2}), & \nu_2 = \varphi(\overline{u_2}, \overline{v_2}).
\end{array} \right.
$$

Les trois systèmes que nous venons ainsi de spécifier étant donc encore supposés ramenés à la forme entière que nous allons indiquer dans un instant, si à présent, entre ces six équations algébriques explicitement déterminées, l'on élimine à la fois, à l'aide des procédés classiques, les quatre quantités

$$
\left\{ \begin{array}{ll}
\varphi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), & \psi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), \\
\varphi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}), & \psi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}),
\end{array} \right.
$$

il appert des tableaux (I), (II), (III) des expressions des λ, μ, ν qui entrent dans la composition de ces trois systèmes, que le résultat de ladite élimination sera bien deux équations algébriques entre les six quantités

$$
(48^{\text{ter}}) \left\{ \begin{array}{llll}
\varphi(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v_1} + \overline{v_2}), & & \psi(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v_1} + \overline{v_2}), & \\
\varphi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \varphi(\overline{u_2}, \overline{v_2}), & \psi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \psi(\overline{u_2}, \overline{v_2}),
\end{array} \right.
$$

et les deux constantes déterminées et uniques, au signe près (*),

$$\varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \qquad \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}),$$

et représentera par conséquent les formules d'addition demandées des fonctions primitivement considérées φ et ψ.

Ces formules d'ailleurs seront évidemment du même degré par rapport aux inconnues, c'est-à-dire aux deux quantités de la première ligne (48ter) que les formules (48) relatives à nos fonctions Φ et Ψ par rapport aux inconnues correspondantes (45), du moment que ces nouvelles inconnues, ne figurant que dans le seul tableau ci-dessus (I), n'entreront que dans un seul des trois systèmes d'équations entre lesquels aura été effectuée l'élimination d'où seront issues les dites formules (**).

(*) Bien que les deux quantités connexes $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$ représentent par hypothèse, avons-nous dit, respectivement pour chacun des deux types de quadrature qui figurent dans les équations (35bis) ou (36bis), les intégrales rectilignes correspondant simultanément à *l'une quelconque* des quatre droites AB, AC, AD, AE (page 178) les deux fonctions en question ne sont cependant susceptibles que d'une seule détermination en valeur absolue; car il est bien clair que si l'on envisage successivement deux droites différentes, les déterminations correspondantes des quantités $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$, savoir $\overline{\omega'_1}$, $\overline{\omega''_1}$ et

$$\overline{\omega'_2} = \overline{\omega'_1} + (\overline{\omega'_2} - \overline{\omega'_1}), \qquad \overline{\omega''_2} = \overline{\omega''_1} + (\overline{\omega''_2} - \overline{\omega''_1})$$

ne différeront que par une demi-période du type de quadrature correspondant, (voir la note de la page ci-après 200), et par conséquent l'on aura toujours

$$\varphi(\overline{\omega'_2}, \overline{\omega''_2}) = \pm\varphi(\overline{\omega'_1}, \overline{\omega''_1}), \qquad \psi(\overline{\omega'_2}, \overline{\omega''_2}) = \pm\psi(\overline{\omega'_1}, \overline{\omega''_1}).$$

La même circonstance expliquera encore comment il se fait, dans les formules (37), que les premiers membres ne sont susceptibles que d'une seule détermination, en grandeur et en signe, malgré la présence dans les seconds membres des mêmes quantités à déterminations multiples $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$.

(**) La même conclusion s'imposerait évidemment à l'égard des formules analogues à trois arguments de chaque sorte, soit pour les fonctions Φ et Ψ, soit pour les fonctions φ et ψ, et partant de là, tout aussi bien quant à celles relatives à un nombre n d'arguments, c'est-à-dire telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ v_1 + v_2 + \cdots + v_n), \\ \varpi(\overline{u_1} + \overline{u_2} + \cdots + \overline{u_n},\ \overline{v_1} + \overline{v_2} + \cdots + \overline{v_n}), \end{array}\right.$$

que l'on en déduirait de proche en proche, au moyen d'une élimination semblable à celle que nous avons indiquée en premier lieu un peu plus haut (pp. 187-188), à l'occasion des fonctions Φ et Ψ.

8. Il importe donc de faire disparaître des formules primitives (48) les radicaux multiples sous lesquels se trouvent engagées les inconnues (45), afin de connaître quel sera le degré de ce système d'équations, lorsqu'elles auront été ainsi ramenées l'une et l'autre à une forme entière par rapport à chacune de ces inconnues, degré qui sera également, avons-nous dit, celui des formules analogues relatives aux autres fonctions φ et ψ.

A cet effet, développant ces deux équations, en convenant de faire désormais, pour abréger,

$$(49)\quad \left\{ \begin{array}{lll} p' = U - (b^2 + c^2), & q' = U - (c^2 + a^2), & r' = U - (a^2 + b^2), \\ p'' = V - b^2c^2, & q'' = V - c^2a^2, & r'' = V - a^2b^2, \end{array} \right.$$

puis faisant passer tous les termes entiers par rapport aux λ, μ, ν dans les seconds membres, nous mettrons ces équations sous la forme simple

$$(50)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{QR} + \sqrt{RP} + \sqrt{PQ} + p'\sqrt{P} + q'\sqrt{Q} + r'\sqrt{R} = \Omega', \\ a^2\sqrt{QR} + b^2\sqrt{RP} + c^2\sqrt{PQ} + p''\sqrt{P} + q''\sqrt{Q} + r''\sqrt{R} = \Omega'', \end{array} \right.$$

en faisant encore une fois, pour abréger les écritures,

$$(51)\quad P = X_1^2X_2^2, \qquad Q = Y_1^2Y_2^2, \qquad R = Z_1^2Z_2^2,$$

$$(52)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega' = \frac{1}{2}\big[(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) + (Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) + (X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) \\ \qquad + p'(X_1^2 + X_2^2) + q'(Y_1^2 + Y_2^2) + r'(Z_1^2 + Z_2^2)\big], \\ \Omega'' = \frac{1}{2}\big[a^2(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) + b^2(Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) + c^2(X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) \\ \qquad + p''(X_1^2 + X_2^2) + q''(Y_1^2 + Y_2^2) + r''(Z_1^2 + Z_2^2)\big]. \end{array} \right.$$

Cela fait, observons qu'on ne saurait appliquer ici pour cet objet le procédé que l'on emploie le plus habituellement dans les éléments en vue d'un but semblable, et consistant à éliminer successivement chacun des divers radicaux, en isolant l'un de ces radicaux comme seul terme dans un membre, puis élevant ensuite au carré, car les différents radicaux n'étant pas indépendants dans la question actuelle, quel que soit celui de ces six

radicaux que l'on fasse ainsi disparaître dans un membre, le même radical se reproduira toujours par cette opération dans l'autre membre; et le calcul se sera ainsi compliqué sans avoir fait un pas.

Voici donc, parmi beaucoup d'autres procédés analogues, celui qu'il conviendra d'employer, et qui conduira, croyons-nous, au résultat le plus avantageux, c'est-à-dire au degré le moins élevé pour le système des deux équations que nous voulons transformer.

Nous multiplierons les deux équations en question successivement par $\sqrt{P}, \sqrt{Q}, \sqrt{R}$, ce qui nous donnera les six équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{PQR} + P\sqrt{R} + P\sqrt{Q} + p'P + q'\sqrt{PQ} + r'\sqrt{RP} = \Omega'.\sqrt{P}, \\ a^2\sqrt{PQR} + b^2P\sqrt{R} + c^2P\sqrt{Q} + p''P + q''\sqrt{PQ} + r''\sqrt{RP} = \Omega''.\sqrt{P}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q\sqrt{R} + \sqrt{PQR} + Q\sqrt{P} + p'\sqrt{PQ} + q'Q + r'\sqrt{QR} = \Omega'.\sqrt{Q}, \\ a^2Q\sqrt{R} + b^2\sqrt{PQR} + c^2Q\sqrt{P} + p''\sqrt{PQ} + q''Q + r''\sqrt{QR} = \Omega''.\sqrt{Q}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} R\sqrt{Q} + R\sqrt{P} + \sqrt{PQR} + p'\sqrt{RP} + q'\sqrt{QR} + r'R = \Omega'.\sqrt{R}, \\ a^2R\sqrt{Q} + b^2R\sqrt{P} + c^2\sqrt{PQR} + p''\sqrt{RP} + q''\sqrt{QR} + r''R = \Omega''.\sqrt{R}, \end{array}\right.$$

équations que nous écrirons, ainsi que les proposées (50) elles-mêmes, en introduisant, pour plus de clarté, les huit variables fictives

$$(53)\quad \left\{\begin{array}{llll} \sqrt{QR}=x, & \sqrt{RP}=y, & \sqrt{PQ}=z, & \sqrt{PQR}=s, \\ \sqrt{P}=u, & \sqrt{Q}=v, & \sqrt{R}=w, & 1=t, \end{array}\right.$$

et ordonnant par rapport à ces variables, sous la forme des huit équations linéaires et homogènes

$$
(54)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x + y + z + 0 - \Omega' t + p'u + q'v + r'w = 0, \\
a^2 x + b^2 y + c^2 z + 0 - \Omega'' t + p'' u + q'' v + r'' w = 0, \\
0 + r'y + q'z + s + p'\mathrm{P}t - \Omega' u + \mathrm{P}v + \mathrm{P}w = 0, \\
0 + r''y + q''z + a^2 s + p''\mathrm{P}t - \Omega'' u + c^2 \mathrm{P}v + b^2 \mathrm{P}w = 0, \\
r'x + 0 + p'z + s + q'\mathrm{Q}t + \mathrm{Q}u - \Omega' v + \mathrm{Q}w = 0, \\
r''x + 0 + p''z + b^2 s + q''\mathrm{Q}t + c^2 \mathrm{Q}u - \Omega'' v + a^2 \mathrm{Q}w = 0, \\
q'x + p'y + 0 + s + r'\mathrm{R}t + \mathrm{R}u + \mathrm{R}v - \Omega' w = 0, \\
q''x + p''y + 0 + c^2 s + r''\mathrm{R}t + b^2 \mathrm{R}u + a^2 \mathrm{R}v - \Omega'' w = 0,
\end{array}
\right.
$$

entre lesquelles l'élimination des huit variables (53) fournira tout d'abord la première équation entière :

$$
(55)\quad \left|
\begin{array}{cccccccc}
1, & 1, & 1, & 0, & -\Omega', & p', & q', & r' \\
a^2, & b^2, & c^2, & 0, & -\Omega'', & p'', & q'', & r'' \\
0, & r', & q', & 1, & p'\mathrm{P}, & -\Omega', & \mathrm{P}, & \mathrm{P} \\
0, & r'', & q'', & a^2, & p''\mathrm{P}, & -\Omega'', & c^2\mathrm{P}, & b^2\mathrm{P} \\
r', & 0, & p', & 1, & q'\mathrm{Q}, & \mathrm{Q}, & -\Omega', & \mathrm{Q} \\
r'', & 0, & p'', & b^2, & q''\mathrm{Q}, & c^2\mathrm{Q}, & -\Omega'', & a^2\mathrm{Q} \\
q', & p', & 0, & 1, & r'\mathrm{R}, & \mathrm{R}, & \mathrm{R}, & -\Omega' \\
q'', & p'', & 0, & c^2, & r''\mathrm{R}, & b^2\mathrm{R}, & a^2\mathrm{R}, & -\Omega''
\end{array}
\right| = 0.
$$

Ce premier résultat étant acquis, et possédant ainsi déjà les huit équations (54), il suffira évidemment d'en avoir une autre semblable, également déduite des proposées, pour que l'élimination des mêmes variables entre ladite équation et sept quelconques empruntées au même système (54), nous donne de la même façon la seconde équation entière demandée.

Pour obtenir une telle équation, éliminons d'abord le premier radical $\sqrt{\mathrm{QR}}$ entre les deux équations proposées (50), ce qui donnera pour résultat

$$
(55^{\text{bis}})\qquad l^2\sqrt{\mathrm{RP}} - n^2\sqrt{\mathrm{PQ}} + p_1\sqrt{\mathrm{P}} + q_1\sqrt{\mathrm{Q}} + r_1\sqrt{\mathrm{R}} = \Omega_1,
$$

en employant de nouveau les notations des Chapitres II et VI, savoir

$$(56)\qquad l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

et faisant, en outre, en ayant égard aux définitions (49) et (52),

$$(57)\qquad p_1 = a^2p' - p'', \qquad q_1 = a^2q' - q'', \qquad r_1 = a^2r' - r'',$$

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_1 = a^2\Omega' - \Omega'' = \tfrac{1}{2}\big[& l^2(Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) - n^2(X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) \\ & + p_1(X_1^2 + X_2^2) + q_1(Y_1^2 + Y_2^2) + r_1(Z_1^2 + Z_2^2)\big], \end{aligned} \right.$$

puis, cela fait, multiplions cette fois l'équation précédente (55bis) par le nouveau radical $\sqrt{QR}$, nous formerons ainsi l'équation

$$l^2R\sqrt{PQ} - n^2Q\sqrt{RP} + p_1\sqrt{PQR} + q_1Q\sqrt{R} + r_1R\sqrt{Q} = \Omega_1.\sqrt{QR},$$

c'est-à-dire, avec nos mêmes variables (53), celle-ci

$$(59)\qquad -\Omega_1x - n^2Qy + l^2Rz + p_1s + 0 + 0 + r_1Rv + q_1Qw = 0,$$

laquelle, remplissant les conditions voulues, suffirait parfaitement à elle seule pour l'objet que nous avons dit tout à l'heure.

Toutefois, le résultat de la nouvelle élimination demandée, étant obtenu par le moyen de cette seule équation, ne présenterait plus la symétrie qui se trouve réalisée par l'équation déjà acquise (55), en raison de ce fait que, dans son calcul, c'est-à-dire relativement à l'ensemble des huit équations précédentes (54), les deux équations données (50) étaient intervenues sur un pied de complète égalité, condition qui ne se trouverait plus remplie actuellement si l'on se bornait, en vue de l'obtention d'un second déterminant analogue à (55), à substituer purement et simplement cette dernière équation (59) à l'une quelconque des précédentes (54).

Voici donc comment il faudra opérer, si l'on veut obtenir encore, pour le résultat de cette seconde opération, la même symétrie que présente le résultat trouvé pour la première (55).

Nous répéterons tout d'abord sur les équations proposées (50),

à l'égard de chacun des deux radicaux suivants $\sqrt{RP}$ et $\sqrt{PQ}$, les deux mêmes opérations que nous avons effectuées tout à l'heure à l'égard du radical $\sqrt{QR}$, c'est-à-dire qu'en les éliminant à tour de rôle entre ces deux équations, nous formerons successivement les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} -l^2\sqrt{QR} + m^2\sqrt{PQ} + p_2\sqrt{P} + q_2\sqrt{Q} + r_2\sqrt{R} &= \Omega_2, \\ n^2\sqrt{QR} - m^2\sqrt{RP} + p_3\sqrt{P} + q_3\sqrt{Q} + r_3\sqrt{R} &= \Omega_3, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles nous faisons encore, pour abréger,

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} p_2 &= b^2p' - p'', & q_2 &= b^2q' - q'', & r_2 &= b^2r' - r'', \\ p_3 &= c^2p' - p'', & q_3 &= c^2q' - q'', & r_3 &= c^2r' - r'', \end{aligned}\right.$$

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_2 = b^2\Omega' \quad \Omega'' = \tfrac{1}{2}\Big[& m^2(X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) - l^2(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) \\ & + p_2(X_1^2 + X_2^2) + q_2(Y_1^2 + Y_2^2 + r_2(Z_1^2 + Z_2^2)\Big], \\ \Omega_3 = c^2\Omega' - \Omega'' = \tfrac{1}{2}\Big[& n^2(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) - m^2(Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) \\ & + p_3(X_1^2 + X_2^2) + q_3(Y_1^2 + Y_2^2) + r_3(Z_1^2 + Z_2^2)\Big]; \end{aligned}\right.$$

puis, cela fait, nous multiplierons les deux équations ainsi formées respectivement par les mêmes radicaux $\sqrt{RP}$ et $\sqrt{PQ}$, ce qui nous donnera de nouveau les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} -l^2R\sqrt{PQ} + m^2P\sqrt{QR} + p_2P\sqrt{R} + q_2\sqrt{PQR} + r_2R\sqrt{P} &= \Omega_2.\sqrt{RP}, \\ n^2Q\sqrt{RP} - m^2P\sqrt{QR} + p_3P\sqrt{Q} + q_3Q\sqrt{P} + r_3\sqrt{PQR} &= \Omega_3\sqrt{PQ}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, encore avec nos variables (53), celles-ci

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} m^2Px - \Omega_2y - l^2Rz + q_2s + 0 + r_2Ru + 0 + p_2Pw &= 0, \\ -m^2Px + n^2Qy - \Omega_3z + r_3s + 0 + q_3Qu + p_3Pv + 0 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Dès lors, l'équation que nous adopterons, d'une part, comme équation nouvelle à joindre ainsi aux huit précédemment acquises (54), sera celle obtenue par l'addition des trois ainsi formées (59)

et (62), c'est-à-dire la suivante

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\Omega_1 x - \Omega_2 y - \Omega_3 z + ks + 0 \\ & + (q_3 Q + r_2 R)u + (r_1 R + p_3 P)v + (p_2 P + q_1 Q)w = 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle nous représentons encore par k le coefficient constant dont la valeur est, en tenant compte des définitions précédentes (57), (60), et (49),

$$\begin{aligned} k = p_1 + q_2 + r_3 &= a^2 p' + b^2 q' + c^2 r' - (p'' + q'' + r'') \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)U - 3V + (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2). \end{aligned}$$

D'autre part, en vue de maintenir, comme nous venons de le dire, l'égalité de traitement entre les deux équations (50) ou les deux premières (54), supposant que nous ayons remplacé la première par l'équation nouvelle qui précède, nous considérerons alors, au lieu et place de la seconde, celle obtenue en multipliant la première par la somme $a^2 + b^2 + c^2$ et retranchant la seconde, c'est-à-dire la suivante

$$(64)\quad (b^2+c^2)x + (c^2+a^2)y + (a^2+b^2)z + 0 - \Omega t + pu + qv + rw = 0,$$

en faisant de nouveau, par analogie avec les notations précédentes,

$$(65)\quad p = (a^2+b^2+c^2)p' - p'', \qquad q = (a^2+b^2+c^2)q' - q'', \qquad r = (a^2+b^2+c^2)r' - r'',$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (a^2 + b^2 + c^2)\Omega' - \Omega'' \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[(b^2 + c^2)(Y_1^2 Z_2^2 + Z_1 Y_2^2) + (c^2 + a^2)(Z_1^2 X_2^2 + X_1^2 Z_2^2) + (a^2 + b^2)(X_1^2 Y_2^2 + Y_1^2 X_2^2) \\ &\qquad + p(X_1^2 + X_2^2) + q(Y_1^2 + Y_2^2) + r(Z_1^2 + Z_2^2)\Big]. \end{aligned} \right.$$

Et dès lors, substituant dans le système (54) les deux dernières équations ainsi formées (63) et (64) aux deux premières équations, il est clair que la seconde équation cherchée sera représentée par le nouveau déterminant qui réalisera bien cette fois les mêmes conditions de symétrie que le premier, savoir :

$$(67)\qquad \begin{vmatrix} -\Omega_1, & -\Omega_2, & -\Omega_3, & k, & 0, & q_3 Q + r_2 R, & r_1 R + p_3 P, & p_2 P + q_1 Q \\ b^2+c^2; & c^2+a^2, & a^2+b^2, & 0, & -\Omega, & p, & q, & r \\ 0, & r', & q', & 1, & p'P, & -\Omega', & P, & P. \\ 0, & r'', & q'', & a^2, & p''P, & -\Omega'', & c^2P, & b^2P \\ r', & 0, & p', & 1', & q'Q, & Q, & -\Omega', & Q \\ r'', & 0, & p'', & b^2, & q''Q, & c^2Q, & -\Omega'', & a^2Q \\ q', & p', & 0, & 1, & r'R, & R, & R, & -\Omega' \\ q'', & p'', & 0, & c^2, & r''R, & b^2R, & a^2R, & -\Omega'' \end{vmatrix} = 0.$$

Le système de ces deux équations (55) et (67), complètement équivalent à celui des deux équations primitives (50) ou (48), représente donc sous la forme entière, les formules d'addition des fonctions Φ et Ψ définies par les équations (36)-(36bis).

Rien n'est plus aisé, en présence de ces résultats, que d'évaluer maintenant le degré de ces deux dernières formules, soit par rapport à l'ensemble des deux inconnues (45), soit par rapport à chacune d'elles séparément.

Pour la première, en effet, tout d'abord, les éléments de ce déterminant étant exclusivement des constantes dans les quatre premières colonnes, et dans les quatre autres au plus des fonctions linéaires de P, Q, R, et des Ω, ses différents termes seront donc au plus du quatrième degré par rapport aux mêmes quantités. Or, d'après les valeurs (44) et (44bis), les X^2, Y^2, Z^2 étant des fonctions linéaires des ν, c'est-à-dire de l'une ou de l'autre des inconnues en question, et par suite, en vertu des définitions (52), (58), (61), (66), et (51), tous les Ω, de même que P, Q, R, étant du second degré par rapport à ces deux inconnues à la fois, ou du premier par rapport à chacune d'elles séparément, il est manifeste que cette première équation (55) sera dès lors du quatrième degré par rapport à chaque inconnue séparément, ou du huitième degré par rapport à l'ensemble de ces deux inconnues.

Semblablement, pour le second déterminant (67), partant de

ce fait, qu'en mettant à part la première ligne, dans laquelle tous les éléments cette fois (sauf les 4e et 5e) sont linéaires par rapport à P, Q, R, et aux Ω, les différents éléments sont encore exclusivement des constantes pour les quatre premières colonnes, et au plus des fonctions linéaires des mêmes quantités pour les quatre autres ; il sera dès lors visible également que tous les déterminants mineurs du premier ordre de ce déterminant, correspondant à la suppression des différents éléments de la première ligne, seront encore, de même que le déterminant précédent (55), du quatrième degré par rapport aux susdites quantités, et que par conséquent le déterminant considéré lui-même sera, par rapport à elles, du cinquième degré, c'est-à-dire du même degré relativement à chacune des deux inconnues séparément, ou du dixième degré par rapport à leur ensemble.

C. Comme exemple d'emploi des formules (48), et en même temps à titre de vérification de ces formules, nous allons examiner en terminant le *criterium* suivant :

« Partant de ce fait, qu'en vertu même des définitions (36)
» et (36bis), l'égalité $x = y$, ou $\Phi(u, v) = \Psi(u, v)$ caractérisera
» les valeurs des variables indépendantes u et v du type $u = \overline{\Omega'}$,
» $v = \overline{\Omega''}$, c'est-à-dire celles qui seront respectivement les mêmes
» multiples exacts des périodes de chacun des deux types d'inté-
» grales qui figurent dans ces équations de définition (36bis) (*), il
» suit de là que si l'on pose, avec le mode de notation dont nous
» sommes convenus (p. 178, *au bas*),

(*) En effet, les valeurs initiales ainsi que les valeurs finales de la variable d'intégration étant supposées respectivement les mêmes pour les quatre intégrales qui entrent dans ces définitions (36bis), il est bien évident que, dans chaque équation séparément, les valeurs des deux intégrales qui y figurent ne pourront différer que par un multiple exact (ou une somme de multiples) des périodes du type de quadrature correspondant, lequel multiple (ou somme de multiples) sera forcément le même pour les deux équations, du moment que le chemin décrit par la variable considérée (x ou y) est le même par hypothèse dans ces deux équations.

$$(68)\begin{cases} A'=\left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & B'=\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & C'=\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ A''=\left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & B''=\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & C''=\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \end{cases}$$

» les six quantités 2A′, 2A″ ; 2B′, 2B″ ; 2C′, 2C″ rentrant alors
» deux à deux dans la catégorie que nous venons de dire (*), les
» formules en question (48) ou (50), en y faisant successivement

» d'abord $\begin{cases} u_1 = u_2 = A', \\ v_1 = v_2 = A'', \end{cases}$ puis $\begin{cases} u_1 = u_2 = B', \\ v_1 = v_2 = B'', \end{cases}$ puis enfin $\begin{cases} u_1 = u_2 = C', \\ v_1 = v_2 = C'', \end{cases}$

(*) En effet, si l'on désigne, comme plus haut, par A, B, C, D, E les cinq points du plan qui sont les affixes des cinq racines de l'équation $F(\rho) = 0$ (racines dont une au moins est toujours réelle, cette équation étant de degré impair), d'une part, les quatre périodes de chacun des deux types d'intégrales considérés seront, si l'on veut, les doubles des intégrales rectilignes correspondantes prises suivant les quatre droites AB, AC, AD, AE. (Puiseux, *Recherches sur les Fonctions Algébriques*, § 58, *Journal de Liouville*, t. XV, 1850, pp. 463-465).

D'autre part, d'après la manière dont nous avons choisi les trois points marqués A, B, C (page 177), le triangle ABC ne renfermant dans son intérieur aucun point critique, et pouvant par suite être réduit, par une déformation continue, à un point unique sans franchir aucun point critique, chacune des deux intégrales $\int\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ et $\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ prises le long du contour de ce triangle ABC est nulle (Ibid., § 14, p. 374, *au bas*), d'où il suit que l'on aura, avec les définitions (68), les égalités

$$\begin{cases} A' + B' + C' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \\ A'' + B'' + C'' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \end{cases}$$

et l'on en pourra tirer, par conséquent, les valeurs :

$$2A' = -2B' - 2C', \qquad 2A'' = -2B'' - 2C''.$$

Or, les quantités 2C′, 2C″ d'une part, et −2B′, −2B″ d'autre part, représentant, d'après les définitions précitées (68) et le mode de notation convenu, les intégrales rectilignes prises respectivement suivant les deux droites AB et AC, pourront, ainsi que nous l'avons dit en premier lieu dans cette note, être prises pour périodes des deux types d'intégrales envisagés, et les deux dernières égalités que nous venons d'écrire montreront alors que les quantités 2A′, 2A″ se composent des mêmes multiples de ces périodes : ce qui justifie dès lors le fait énoncé ci-dessus.

» devront dès lors, si elles sont exactes, faire ressortir les trois
» égalités

(69) $$\left\{\begin{aligned} &\Phi(2A', 2A'') = \Psi(2A', 2A''), \quad \Phi(2B', 2B'') = \Psi(2B', 2B''), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Phi(2C', 2C'') = \Psi(2C', 2C''). \end{aligned}\right.$$

Pour voir s'il en est ainsi, faisant donc, en premier lieu,

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= u_2 = A' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ v_1 &= v_2 = A'' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \end{aligned}\right. \quad (^*)$$

il résultera des définitions (41), (42), et (43) que l'on aura par conséquent, dans la question actuelle

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \mu_1 = \Phi(A', A'') = -c^2, \qquad & \lambda_2 = \mu_2 = \Psi(A', A'') = -b^2, \\ \nu_1 = \Psi(2A', 2A''), \qquad & \nu_2 = \Phi(2A', 2A''), \end{aligned}$$

(*) En effet, comme dans la note précédente, d'après l'hypothèse admise sur le choix de la constante ρ_0 (page 177, *au bas*), le triangle RBC ne pouvant renfermer non plus dans son intérieur aucun point critique, l'on aura assurément, pour la même raison que tout à l'heure, les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \\ \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera semblablement, en séparant en deux membres, et renversant les limites de l'une des intégrales dans chaque équation :

$$\left\{\begin{aligned} \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right). \end{aligned}\right.$$

et le calcul consistera par conséquent à s'assurer qu'en faisant $\lambda_1 = \mu_1 = -c^2$, $\lambda_2 = \mu_2 = -b^2$, les formules en question (50) ou (48) donneront bien la condition $\nu_1 = \nu_2$.

Or, pour ces mêmes valeurs de λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, les expressions (44), (44bis), et (51) devenant

$$(70)\quad \begin{cases} X_1 = \sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}(a^2+\nu_1)}, & Y_1 = \sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{b^2-a^2}(a^2+\nu_1)}, \quad Z_1 = 0 \\ X_2 = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}(a^2+\nu_2)}, & Y_2 = 0, \quad Z_2 = \sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}(a^2+\nu_2)} \end{cases}$$

$$(71)\quad P = X_1^2X_2^2 = (a^2+\nu_1)(a^2+\nu_2), \quad Q = Y_1^2Y_2^2 = 0, \quad R = Z_1^2Z_2^2 = 0,$$

la seconde équation du système proposé, en le prenant sous la forme (50), se réduira donc, dans le cas actuel, simplement à

$$(72)\qquad p''\sqrt{(a^2+\nu_1)(a^2+\nu_2)} = \Omega'',$$

Ω'' étant alors, d'après la définition (52), et en vertu des valeurs qui précèdent, l'expression

$$\Omega'' = \frac{1}{2}\Big[a^2\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1).\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2) + b^2\frac{-n^2}{l^2}(a^2+\nu_1).\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2)$$
$$+ c^2\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1).\frac{l^2}{-n^2}(a^2+\nu_2) + p''\left\{\frac{-n^2}{l^2}(a^2+\nu_1) + \frac{l^2}{-n^2}(a^2+\nu_2)\right\}$$
$$+ q''\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1) + r''\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2)\Big]$$
$$= \frac{1}{2n^2l^2}\big[a^2m^4(b^2+\nu_1)(c^2+\nu_2) + b^2n^2m^2(a^2+\nu_1)(c^2+\nu_2) + c^2m^2l^2(b^2+\nu_1)(a^2+\nu_2)$$
$$- p''\left\{n^4(a^2+\nu_1) + l^4(a^2+\nu_2)\right\} - q''m^2n^2(b^2+\nu_1) - r''l^2m^2(c^2+\nu_2)\big]$$
$$= \frac{1}{2n^2l^2}\big[a^2m^4(b^2c^2 + c^2\nu_1 + b^2\nu_2 + \nu_1\nu_2) + b^2m^2n^2(c^2a^2 + c^2\nu_1 + a^2\nu_2 + \nu_1\nu_2)$$
$$+ c^2l^2m^2(a^2b^2 + a^2\nu_1 + b^2\nu_2 + \nu_1\nu_2) - (p''n^4 + q''m^2n^2)\nu_1$$
$$- (p''l^4 + r''l^2m^2)\nu_2 - p''(n^4+l^4)a^2 - q''m^2n^2b^2 - r''l^2m^2c^2\big],$$

valeur que nous écrirons dès lors

$$(73)\qquad \Omega'' = \frac{1}{2n^2l^2}\left(\mathcal{A}\nu_1\nu_2 + \mathcal{B}\nu_1 + \mathcal{C}\nu_2 + \mathcal{D}\right),$$

en y faisant,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= a^2m^4 + b^2m^2n^2 + c^2l^2m^2,\\
\mathcal{B} &= a^2m^4.c^2 + b^2m^2n^2.c^2 + c^2l^2m^2.a^2 - (p''n^4 + q''m^2n^2),\\
\mathcal{C} &= a^2m^4.b^2 + b^2m^2n^2.a^2 + c^2l^2m^2.b^2 - (p''l^4 + r''l^2m^2),\\
\mathcal{D} &= a^2m^4.b^2c^2 + b^2m^2n^2\ c^2a^2 + c^2l^2m^2.a^2b^2 - p''(n^4 + l^4)\,a^2 - m^2\,(q''n^2b^2 + r''l^2c^2).
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on tient compte des définitions (56) qui donnent

$$(74)\qquad l^2 + m^2 + n^2 = 0, \qquad a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2 = 0,$$

ainsi que de celles (49), l'on trouvera sans peine pour la valeur des trois premiers de ces coefficients :

$$(75)\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= m^2\,(a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2) = 0,\\
\mathcal{B} &= m^2\left[(m^2 + l^2)\,c^2a^2 + n^2b^2c^2 - q''n^2\right] - p''n^4\\
&= m^2\left[-n^2.c^2a^2 + n^2b^2c^2 - (\mathrm{V} - c^2a^2)\,n^2\right] - p''n^4\\
&= -m^2n^2(\mathrm{V} - b^2c^2) - p''n^4 = -m^2n^2.p'' - p''n^4 = -n^2(m^2 + n^2)p'' = n^2l^2.p'',\\
\mathcal{C} &= m^2\left[(m^2 + n^2)\,a^2b^2 + l^2b^2c^2 - r''l^2\right] - p''l^4\\
&= m^2\left[-l^2a^2b^2 + l^2b^2c^2 - (\mathrm{V} - a^2b^2)\,l^2\right] - p''l^4\\
&= -m^2l^2\,(\mathrm{V} - b^2c^2) - p''l^4 = -m^2l^2.p'' - p''l^4 = -l^2(m^2 + l^2).p'' = l^2n^2.p''.
\end{aligned}\right.$$

Semblablement, pour le dernier coefficient $\mathcal{D}$, remarquant que les mêmes définitions (56) et (49) donnent ensemble, eu égard aux relations ci-dessus (74), l'égalité

$$\begin{aligned}
&a^2m^2p'' + b^2n^2q'' + c^2l^2r''\\
&= a^2m^2\,(\mathrm{V} - b^2c^2) + b^2n^2\,(\mathrm{V} - c^2a^2) + c^2l^2\,(\mathrm{V} - a^2b^2)\\
&= (a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2)\,\mathrm{V} - (m^2 + l^2 + n^2)\,a^2b^2c^2 = 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$b^2n^2q'' + c^2l^2r'' = - a^2m^2p'',$$

l'on trouvera donc aussi aisément, pour la valeur de ce coefficient (D),

$$(\mathfrak{D}) = m^2(m^2 + n^2 + l^2)\, a^2b^2c^2 - p''(n^4 + l^4)\, a^2 + m^2.a^2m^2p''$$
$$= \left[-(n^4+l^4)+m^4\right].a^2p''=\left[-n^4-l^4+(n^2+l^2)^2\right]a^2p''=2n^2l^2.a^2p''.$$

Cette dernière valeur étant jointe aux précédentes (75), l'on obtiendra donc, pour l'expression (73), celle-ci

$$\Omega''= \frac{1}{2n^2l^2}(n^2l^2p''.\nu_1 + l^2n^2p''.\nu_2+ 2n^2l^2.a^2p'') = \tfrac{1}{2}p''(\nu_1 + \nu_2+ 2a^2);$$

et dès lors, en reportant cette valeur au second membre de l'équation ci-dessus (72), celle-ci deviendra, en la multipliant alors par le facteur constant $\frac{2}{p''}$,

$$2\sqrt{(a^2 + \nu_1)(a^2 + \nu_2)} = \nu_1 + \nu_2 + 2a^2,$$

ou, en élevant au carré et développant,

$$4\left[a^4+ (\nu_1 + \nu_2)a^2 + \nu_1\nu_2\right] = (\nu_1 + \nu_2)^2 + 4(\nu_1+\nu_2)\, a^2 + 4a^4,$$

et enfin, en réduisant,

$$4\nu_1\nu_2 = (\nu_1 + \nu_2)^2 \qquad \text{ou} \qquad (\nu_1 - \nu_2)^2 = 0,$$

et l'on trouve bien ainsi, comme on devait la rencontrer, la condition $\nu_1 = \nu_2$, c'est-à-dire la première des conditions imposées *a priori* (69), les deux suivantes devant ressortir évidemment du même calcul par la seule permutation des trois constantes a^2, b^2, c^2 : ce qui justifie pleinement l'exactitude de la théorie et des diverses formules établies dans ce second paragraphe.

III

Une autre vérification péremptoire, plus élémentaire sinon plus simple, consistera également, si l'on veut, à s'assurer qu'avec une variable de moins, on arrivera par cette voie précisément aux formules connues d'addition des fonctions elliptiques.

Nous croyons devoir indiquer encore le développement de ce dernier calcul, qui constituera dès lors une démonstration nouvelle de ces formules déduite exclusivement des théories exposées dans la Note III.

Adoptant comme point de départ, à la place des six équations (1) et (2), ou (4) et (5), de ladite Note, représentant celles (20) du Chapitre III, les trois suivantes

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &P\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2 = 1, \\ &P\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{dv}{d\mu}\right)^2 = 1, \end{aligned}\right. \qquad P\frac{du}{d\lambda}\frac{dv}{d\lambda} + Q\frac{du}{d\mu}\frac{dv}{d\mu} = 0,$$

dans lesquelles, en faisant

$$(77)\qquad \varphi(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho),$$

P et Q désigneront alors simplement les expressions

$$(78)\qquad P = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \mu}, \qquad Q = \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda},$$

puis, nous proposant encore comme but la recherche de la solution la plus générale de ce système (76), et reprenant à cet effet exactement la même série de considérations, que pour le problème plus général traité dans la Note III, nous ferons encore dépendre cette recherche de la solution la plus générale de l'une des équations de gauche du dit système (76), qui pourra être

écrite, eu égard aux définitions précédentes de P et Q, en introduisant encore une indéterminée U,

$$\varphi(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2-(\lambda+U)-\left[\varphi(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2-(\mu+U)\right]=0,$$

et qui, étant vérifiée par conséquent en faisant à la fois

$$\varphi(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2-(\lambda+U)=0,\qquad \varphi(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2-(\mu+U)=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(79)\qquad \frac{du}{d\lambda}=\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}},\qquad \frac{du}{d\mu}=\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}},$$

admettra, par conséquent, d'après le procédé de Jacobi, pour intégrale complète, l'équation

$$(79^{\text{bis}})\qquad u=\int\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}}\,d\lambda+\int\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}}\,d\mu+V;$$

d'où il suit que l'intégrale générale de la même équation (76) s'obtiendra en faisant $V=\psi(U)$, et éliminant l'arbitraire U entre la précédente et celle que l'on en déduira, dans cette hypothèse, par la différentiation en U, savoir

$$(80)\qquad \int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda+U)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu+U)}}=-2\psi'(U).$$

Cela posé, l'équation de Lamé relative à la même inconnue u, laquelle est unique dans le cas actuel de deux variables indépendantes λ et μ seulement, savoir

$$2(\lambda-\mu)\frac{d^2u}{d\lambda d\mu}+\frac{du}{d\lambda}-\frac{du}{d\mu}=0,$$

équation que l'on démontrerait, sans peine, de la même façon

que pour le cas de trois variables indépendantes, être une conséquence différentielle des trois équations du premier ordre proposées (76), étant récrite avec les notations admises précédemment, fournira semblablement les deux équations

$$2(\lambda-\mu)\frac{dM}{d\lambda}+\Lambda-M=0, \qquad 2(\lambda-\mu)\frac{d\Lambda}{d\mu}+\Lambda-M=0,$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$(81) \qquad \frac{d.\Lambda^2}{d\mu}=\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda}, \qquad \frac{d.M^2}{d\lambda}=\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu},$$

dans lesquelles Λ et M représentent par hypothèse les valeurs ci-dessus (79), et où l'on a, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} &\Lambda^2=\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}, && M^2=\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}, \\ &\frac{d.\Lambda^2}{d\mu}=\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{dU}{d\mu}, && \frac{d.M^2}{d\lambda}=\frac{1}{\varphi(\mu)}\frac{dU}{d\lambda}. \end{aligned}\right.$$

La comparaison de ces dernières valeurs avec les précédentes (81) conduira donc aux deux équations

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{dU}{d\mu}=\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda}, \qquad \frac{1}{\varphi(\mu)}\frac{dU}{d\lambda}=\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu},$$

c'est-à-dire aux deux expressions

$$\frac{dU}{d\lambda}=\varphi(\mu)\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu}, \qquad \frac{dU}{d\mu}=\varphi(\lambda)\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda},$$

et par suite à l'équation différentielle totale qui déterminera U

$$dU=-\frac{\Lambda-M}{\lambda-\mu}\Big(\varphi(\mu)M.d\lambda+\varphi(\lambda)\Lambda.d\mu\Big),$$

c'est-à-dire, explicitement, eu égard aux valeurs (79) de A et M,

$$dU = \frac{-1}{\lambda-\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}}\right)\left(\sqrt{\varphi(\mu)(\mu+U)}.d\lambda+\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda+U)}.d\mu\right),$$

équation dont on démontrera sans peine, à l'aide des mêmes procédés, que l'intégrale générale peut être présentée sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(81^{bis})\qquad U = (\alpha X + \beta Y)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2)(\lambda + \mu),$$

ou bien

$$(82)\qquad -U(\alpha^2+\beta^2) = (\beta X - \alpha Y)^2 - (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2),$$

α et β étant deux constantes supposées liées par la relation

$$(82^{bis})\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

et X et Y désignant cette fois, pour abréger, les expressions

$$(83)\qquad X = \sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2-b^2}},\qquad Y = \sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2-a^2}}.$$

Partant de là, et attribuant dorénavant à la fonction U la valeur constante $U = c^2$, auquel cas les deux variables λ et μ seront liées entre elles, au lieu des deux équations (80) et (82), par celles-ci qui seront dès lors équivalentes, l'une sous forme transcendante, l'autre sous forme algébrique, savoir

$$(84)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(c^2+\lambda)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(c^2+\mu)}} = \text{const.}, \\ (\beta X-\alpha Y)^2-(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)+c^2(\alpha^2+\beta^2) = 0; \end{array}\right.$$

puis faisant encore, comme dans les deux paragraphes précédents,

$$(84^{bis})\qquad f(\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho) = \varphi(\rho)(c^2+\rho),$$

et introduisant enfin de nouveau, en vue de profiter des résultats

de calculs antérieurs, les notations (56) et les relations (74) qui en découlent, notations qui permettront d'écrire les deux équations précédentes (84) sous la forme

$$(85)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=0, \\ (6X-\alpha Y)^2-m^2\alpha^2+n^2 6^2=0, \end{array}\right.$$

en introduisant dans la première, comme constante d'intégration, la limite inférieure ρ_0 des deux intégrales ; cela étant fait, disons-nous, nous considérerons deux systèmes de valeurs de λ et μ satisfaisant simultanément, pour les mêmes valeurs des arbitraires d'intégration α, 6, ou ρ_0, à l'une et à l'autre des deux équations équivalentes que nous venons d'écrire, et n'étant d'ailleurs astreints qu'à cette seule et unique condition, systèmes que nous dénoterons encore, ainsi que toutes les quantités qui s'y rapporteront, par les indices 1 et 2 : ce qui revient à dire que nous aurons alors, par hypothèse, les quatre égalités

$$(86)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=0, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=0, \\ (6X_1-\alpha Y_1)^2-m^2\alpha^2+n^2 6^2=0, & (6X_2-\alpha Y_2)^2-m^2\alpha^2+n^2 6^2=0, \end{array}\right.$$

et les deux équations résultant de l'élimination, d'une part de l'arbitraire ρ_0 entre les deux premières équations, et d'autre part des arbitraires α, 6 entre les deux dernières qui sont homogènes par rapport à ces deux quantités, exprimeront encore évidemment deux relations équivalentes entre les deux systèmes de valeurs considérés λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2.

La première des deux résultantes que nous venons de spécifier s'obtiendra immédiatement en retranchant simplement l'une de l'autre les deux équations de la première ligne (86), et pourra s'écrire en conséquence

$$(87)\qquad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}+\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=0.$$

Quant à l'autre résultante, on l'obtiendra sans peine également en observant que la seconde des deux équations (85) montrant que la différence $6X - \alpha Y$ est une quantité constante, fonction de α et 6, on aura donc, dans l'hypothèse admise, l'équation

$$6X_1 - \alpha Y_1 = 6X_2 - \alpha Y_2 \quad \text{ou} \quad 6(X_1 - X_2) = \alpha(Y_1 - Y_2),$$

ou encore celle-ci

$$(88) \qquad \frac{\alpha}{X_1 - X_2} = \frac{6}{Y_1 - Y_2},$$

qui pourra remplacer l'une des deux équations de la seconde ligne (86), et que dès lors, si on la substitue à celle de droite par exemple, le résultat de l'élimination de $\alpha, 6$ entre cette même (88) et la première de la seconde ligne (86) sera évidemment

$$[X_1(Y_1 - Y_2) - Y_1(X_1 - X_2)]^2 - m^2(X_1 - X_2)^2 + n^2(Y_1 - Y_2)^2 = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(89) \qquad (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 - m^2(X_1 - X_2)^2 + n^2(Y_1 - Y_2)^2 = 0.$$

Or les deux équations ainsi obtenues (87) et (89), considérées simultanément, contiennent bien, comme nous allons le faire voir à présent, les formules connues d'addition des fonctions elliptiques de première espèce.

Pour le montrer, définissant d'une part la fonction $x = \operatorname{sn} z$ par l'équation transcendante

$$(90) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = z,$$

et, partant de là, les deux fonctions connexes $\operatorname{cn} z$ et $\operatorname{dn} z$ par les relations algébriques

$$(91) \qquad \operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z = 1, \qquad \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1,$$

avec la condition que pour $z = 0$ l'on ait à la fois $\operatorname{cn} 0 = 1$, et

dn 0 = 1, puis faisant $\lambda_1 = -a^2$, la première de ces équations, à savoir celle (87), pourra être écrite

$$\int_{-a^2}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} - \int_{-a^2}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0;$$

et dès lors, si l'on pose

$$(92) \qquad \int_{-a^2}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \varphi, \qquad \int_{-a^2}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \psi,$$

elle se réduira à

$$(93) \qquad \int_{-a^2}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \varphi + \psi.$$

Or, comme en partant des seules définitions (90) et (91), l'équation

$$(93^{\text{bis}}) \qquad \int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \omega$$

donne, d'après un calcul déjà présenté deux fois dans cet Ouvrage (voir Chap. II, pp. 114-115, et Chap. IV, note de la page 309), les valeurs

$$(93^{\text{ter}}) \qquad a^2 + \lambda = l^2 \operatorname{sn}^2 g\omega, \qquad b^2 + \lambda = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\omega, \qquad c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2 g\omega,$$

dans lesquelles on suppose

$$(94) \qquad g = \frac{in}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}, \qquad k = \frac{il}{n} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

les trois équations ci-dessus (92) et (93) donneront donc, avec la même hypothèse,

$$\left\{ \begin{array}{lll} a^2 + \lambda_2 = l^2 \operatorname{sn}^2 g\varphi, & a^2 + \mu_2 = l^2 \operatorname{sn}^2 g\psi, & a^2 + \mu_1 = l^2 \operatorname{sn}^2 g(\varphi + \psi), \\ b^2 + \lambda_2 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\varphi, & b^2 + \mu_2 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\psi, & b^2 + \mu_1 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g(\varphi + \psi), \end{array} \right.$$

ou plus simplement, en faisant dorénavant $g\varphi = u$ et $g\psi = v$,

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2+\lambda_2 = \ \ l^2\mathrm{sn}^2 u, & a^2+\mu_2 = \ \ l^2\mathrm{sn}^2 v, & a^2+\mu_1 = \ \ l^2\mathrm{sn}^2(u+v), \\ b^2+\lambda_2 = -l^2\mathrm{cn}^2 u, & b^2+\mu_2 = -l^2\mathrm{cn}^2 v, & b^2+\mu_1 = -l^2\mathrm{cn}^2(u+v), \end{array}\right.$$

valeurs qui, étant remises, en même temps que l'hypothèse $\lambda_1 = -a^2$, dans les formules de définition (83), fourniront alors les expressions

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\mu_1)}{a^2-b^2} = 0, & Y_1^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\mu_1)}{b^2-a^2} = -l^2\mathrm{cn}^2(u+v), \\ X_2^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_2)(a^2+\mu_2)}{a^2-b^2} = l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v, & Y_2^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_2)(b^2+\mu_2)}{b^2-a^2} = -l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v, \end{array}\right.$$

ou, en extrayant les racines, quant aux Y, celles-ci

$$Y_1 = il\,\mathrm{cn}\,(u+v), \qquad Y_2 = il\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v,$$

d'où l'on conclura encore la suivante :

$$Y_1 Y_2 = -l^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,(u+v).$$

Avec ces différentes expressions, l'équation (89) qui se réduit déjà, par suite de la valeur $X_1 = 0$, à celle-ci

$$Y_1^2 X_2^2 - m^2 X_2^2 + n^2 (Y_1^2 - 2Y_1 Y_2 + Y_2^2) = 0,$$

ou

$$Y_1^2 (X_2^2 + n^2) - 2n^2\,Y_1 Y_2 + n^2 Y_2^2 - m^2 X_2^2 = 0,$$

devient par conséquent, dans le cas actuel,

$$-l^2\mathrm{cn}^2(u+v).(l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v + n^2) + 2n^2.l^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,(u+v)$$
$$-n^2.l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v - m^2.l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v = 0,$$

ou, en divisant par $-n^2 l^2$,

$$\left(1+\frac{l^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v\right).\mathrm{cn}^2(u+v) - 2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v.\mathrm{cn}\,(u+v)$$
$$+\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v = 0,$$

équation qui, en introduisant alors le module k défini par la seconde équation (94), et son complémentaire k_1 défini par celle-ci

$$k_1^2 = 1 - k^2 = 1 + \frac{l^2}{n^2} = \frac{n^2 + l^2}{n^2} = -\frac{m^2}{n^2},$$

pourra être écrite plus simplement

$$(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v) . \operatorname{cn}^2(u+v) - 2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v . \operatorname{cn}(u+v) \\ + \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = 0,$$

et dont les deux racines représentent évidemment les valeurs de $\operatorname{cn}(u+v)$ et $\operatorname{cn}(u-v)$, du moment que ses coefficients ne changent pas lorsque l'on y change v en $-v$.

Sous cette forme, son discriminant étant alors

$$\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)$$
$$= \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - (\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v . \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v + k^2 k_1^2 \operatorname{sn}^4 u \operatorname{sn}^4 v)$$
$$= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[k^2 \{ 1 - (\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \} + k_1^2 - k^2 k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \right]$$
$$= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[k^2 + k_1^2 - k^2 (\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + k^2 (1 - k_1^2) \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \right]$$
$$= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[1 - k^2 (\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \right]$$
$$= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v . (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v) = \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v,$$

ces racines seront, par conséquent,

$$\operatorname{cn}(u \mp v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \pm \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

et pour établir la corrélation des doubles signes dans les deux membres, il suffira d'observer, que si l'on prenait le signe supérieur dans le premier membre en même temps que le signe inférieur dans le second, pour la valeur particulière $u = v = \mathrm{K}$, le premier membre se réduirait à la valeur positive $\operatorname{cn} 0 = 1$, tandis que le second serait la valeur négative $-\frac{\operatorname{sn}^2 \mathrm{K} \operatorname{dn}^2 \mathrm{K}}{1 - k^2} = -1$. Il faut donc prendre à la fois le signe supérieur ou le signe infé-

rieur dans les deux membres, c'est-à-dire que l'on aura définitivement

$$(95)\quad \left\{ \operatorname{cn}(u+v) = \frac{N}{D}, \qquad \begin{aligned} N &= \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v, \\ D &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v, \end{aligned} \right.$$

et l'on en conclura par suite, en vertu de la première équation de définition (91), cette autre égalité

$$(96)\qquad \operatorname{sn}^2(u+v) = 1 - \operatorname{cn}^2(u+v) = 1 - \frac{N^2}{D^2} = \frac{D^2 - N^2}{D^2}.$$

Or, le dénominateur D pouvant être écrit, vu sa symétrie en u et v, indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes (*)

$$\left\{ \begin{aligned} D &= 1 - \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v) = \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v, \\ D &= 1 - \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = \operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u, \end{aligned} \right.$$

on trouvera donc, en multipliant l'une par l'autre ces deux expressions,

$$D^2 = (\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v)(\operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u),$$

et par suite, en développant cette dernière valeur, et tenant compte de celle (95) de N,

$$\begin{aligned} D^2 - N^2 &= \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v . \operatorname{cn}^2 v + \operatorname{cn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u \\ &\quad - (\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - 2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v . \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v) \\ &= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + 2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \\ &= (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2, \end{aligned}$$

d'où, en reportant enfin au dernier membre de l'égalité (96) et extrayant alors les racines,

$$\operatorname{sn}(u+v) = \pm \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

(*) Nous empruntons cet ingénieux artifice au *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Jordan (Tome II, § 369, pp. 371-372).

l'ambiguïté de signe du second membre étant tranchée, cette fois, par ce fait que pour $v=0$, cette égalité se réduit à $\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn} u$, ce qui exclut le signe inférieur, et donne définitivement la valeur

$$(97) \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{N'}{D}, \qquad N' = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

d'où l'on conclura encore, en vertu de la seconde équation de définition (91),

$$(98) \qquad \operatorname{dn}^2(u+v) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u+v) = 1 - k^2\frac{N'^2}{D^2} = \frac{D^2 - k^2N'^2}{D^2}.$$

Or, si l'on observe, ainsi que nous l'avons fait dans notre Chapitre III [page 243, équation (183)], que le même dénominateur D (95) peut encore être écrit à nouveau sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{cases} D = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u\,(1 - \operatorname{sn}^2 v) = \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v, \\ D = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 v + k^2\operatorname{sn}^2 v\,(1 - \operatorname{sn}^2 u) = \operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u, \end{cases}$$

on aura donc, comme tout à l'heure, en multipliant encore ces deux expressions entre elles,

$$D^2 = (\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v)(\operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u),$$

et par suite, en développant, et tenant compte de la valeur (97) de N′,

$$\begin{aligned} D^2 - k^2N'^2 &= \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v + k^2(\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v . \operatorname{dn}^2 v + \operatorname{dn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u) + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \\ &\quad - k^2(\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v + 2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u) \\ &= \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v - 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \\ &= (\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v)^2, \end{aligned}$$

d'où, en reportant enfin au dernier membre des égalités (98), et extrayant encore les racines, cette nouvelle égalité

$$\operatorname{dn}(u+v) = \pm \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

l'ambiguïté de signe étant de nouveau tranchée par le fait que

pour $v = 0$, elle se réduit à $\mathrm{dn}\, u = \pm \mathrm{dn}\, u$, ce qui exclut encore le signe inférieur, en sorte que l'on a définitivement la troisième formule

$$\mathrm{dn}\,(u+v) = \frac{N''}{D}, \qquad N'' = \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{dn}\, v - k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{cn}\, v,$$

qui parfait complètement la vérification que nous avions entreprise.

La méthode développée dans le paragraphe précédent, pour trouver les formules d'addition des fonctions hyperelliptiques, étant appliquée de point en point au cas plus simple des fonctions elliptiques de première espèce, nous a donc bien redonné exactement, comme nous voulions le vérifier, les formules analogues connues relatives à ces dernières fonctions.

IV

Il nous faut montrer encore, à propos du même cas simple des fonctions elliptiques, que la théorie et les méthodes exposées dans cette Note conduisent également bien aux formules connues d'addition des fonctions de deuxième et de troisième espèce.

Pour retrouver celles-là, il sera nécessaire de pousser jusqu'au bout la solution du problème posé au commencement du paragraphe III précédent, c'est-à-dire la détermination, par le moyen des trois équations (76), de l'inconnue u en fonction des variables indépendantes λ et μ, expression qui ne devait pas intervenir elle-même dans nos calculs développés tout à l'heure à l'occasion des fonctions de première espèce.

A cet effet, calquant nos procédés de recherche sur ceux indiqués dans le second paragraphe de la Note III, de l'expression (81bis) de la fonction U nous conclurons tout d'abord la valeur

$$\begin{aligned}\lambda + U &= \lambda + \left[(\alpha X + 6Y)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2) - (\alpha^2 + 6^2)(\lambda + \mu)\right]\\ &= (\alpha X + 6Y)^2 - \left[a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + (\alpha^2 + 6^2)\mu\right]\\ &= \left[X^2 - (a^2 + \mu)\right]\alpha^2 + \left[Y^2 - (b^2 + \mu)\right]6^2 + 2\alpha 6 XY,\end{aligned}$$

et comme les définitions (83) de X et Y donnent actuellement

$$a^2 + \mu = \frac{(a^2 - b^2)X^2}{a^2 + \lambda}, \qquad b^2 + \mu = \frac{(b^2 - a^2)Y^2}{b^2 + \lambda},$$

l'expression précédente se mettra aisément sous la forme

$$\lambda + U = \left[X^2 - \frac{(a^2 - b^2)X^2}{a^2 + \lambda}\right]\alpha^2 + \left[Y^2 - \frac{(b^2 - a^2)Y^2}{b^2 + \lambda}\right]6^2 + 2\alpha 6XY$$

$$= \left[a^2 + \lambda - (a^2 - b^2)\right]\frac{\alpha^2 X^2}{a^2 + \lambda} + \left[b^2 + \lambda - (b^2 - a^2)\right]\frac{6^2 Y^2}{b^2 + \lambda} + 2\alpha 6XY$$

$$= (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\left[\frac{\alpha^2 X^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{6^2 Y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + 2\frac{\alpha X}{a^2 + \lambda}\frac{6Y}{b^2 + \lambda}\right],$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la définition (77) du symbole $\varphi(\rho)$, que l'on aura les deux valeurs

$$\lambda + U = \varphi(\lambda)\left(\frac{\alpha X}{a^2 + \lambda} + \frac{6Y}{b^2 + \lambda}\right)^2, \qquad \mu + U = \varphi(\mu)\left(\frac{\alpha X}{a^2 + \mu} + \frac{6Y}{b^2 + \mu}\right)^2,$$

avec lesquelles les deux dérivées (79) de u auront dès lors pour expressions, en prenant le même signe pour toutes les deux :

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{\alpha X}{a^2 + \lambda} + \frac{6Y}{b^2 + \lambda}, \qquad \frac{du}{d\mu} = \frac{\alpha X}{a^2 + \mu} + \frac{6Y}{b^2 + \mu}.$$

Or, la différentiation des expressions (83) donnant les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{d\lambda} &= \frac{1}{2}\frac{X}{a^2 + \lambda}, & \frac{dY}{d\lambda} &= \frac{1}{2}\frac{Y}{b^2 + \lambda}, \\ \frac{dX}{d\mu} &= \frac{1}{2}\frac{X}{a^2 + \mu}, & \frac{dY}{d\mu} &= \frac{1}{2}\frac{Y}{b^2 + \mu}, \end{aligned}\right.$$

les expressions que nous venons d'obtenir pour les dérivées de u pourront donc s'écrire

$$\frac{du}{d\lambda} = 2\left(\alpha\frac{dX}{d\lambda} + 6\frac{dY}{d\lambda}\right), \qquad \frac{du}{d\mu} = 2\left(\alpha\frac{dX}{d\mu} + 6\frac{dY}{d\mu}\right),$$

et donneront, d'abord pour la différentielle de u,

$$du = 2\left[\alpha\left(\frac{dX}{d\lambda}d\lambda + \frac{dX}{d\mu}d\mu\right) + 6\left(\frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu\right)\right]$$
$$= 2(\alpha\, dX + 6\, dY),$$

puis de là, en intégrant,

(99) $$u = 2(\alpha X + 6Y) + \text{const.},$$

expression qui, étant comparée à celle (6) du cas général, fait voir que le coefficient constant d a, dans le cas particulier correspondant à nos hypothèses, la valeur $d = \frac{1}{2}$.

Ce résultat étant acquis, supposons à présent que nous attribuions de nouveau à la fonction U la valeur constante $U = c^2$: alors, d'une part, l'équation (80) se transformera encore dans la première équation (84), qui pourra être écrite à l'aide du symbole $f(\rho)$ (84bis), sous forme condensée, pour $\rho = \lambda, \mu$

(100) $$\sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = W,$$

et, d'autre part, l'équation (79bis) devenant alors, avec le même mode de notation,

$$u = \sum_\rho \int \sqrt{\frac{\rho + c^2}{\varphi(\rho)}}\, d\rho + V, \quad \text{ou} \quad u - V = \sum_\rho \int \frac{\rho + c^2}{\sqrt{\varphi(\rho)(\rho + c^2)}}\, d\rho$$

pourra s'écrire également, à l'aide du même symbole $f(\rho)$,

(101) $$\sum_\rho \int \frac{\rho + c^2}{\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = u - V.$$

Et dès lors, si on l'ajoute à la précédente (100) multipliée par $a^2 - c^2$, l'on voit, comme, pour le cas général de trois variables indépendantes, à propos des équations (3), (4), (5), et (6), que l'ensemble de ces deux équations (100) et (101) pourra être remplacé par les deux suivantes

(102) $$\sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = W, \qquad \sum_\rho \int \frac{\rho + a^2}{\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = u + \text{const.},$$

qui pourront encore être considérées comme l'intégrale sous forme transcendante du système différentiel

$$(103)\qquad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = 0, \qquad \sum_\rho \frac{\rho + a^2}{\sqrt{f(\rho)}} d\rho = du,$$

pendant que l'équation (99) ci-dessus et la seconde équation (84) ou (85), savoir

$$(104)\qquad (6X - \alpha Y)^2 - m^2\alpha^2 + n^2 6^2 = 0,$$

représentant l'équation (82) ou (81bis) pour l'hypothèse $U = c^2$, constitueront pareillement l'intégrale algébrique du même système.

Or, cet énoncé, pour le cas simple actuel, du théorème d'Abel sous la première forme où nous l'avons obtenu, renferme implicitement, comme on va le voir, les formules d'addition des fonctions elliptiques de deuxième et de troisième espèces.

I. En effet, si prenant $\rho_0 = -a^2$ pour limite inférieure des intégrales, et adoptant μ pour variable indépendante, nous convenons de désigner par λ_0 la valeur de λ correspondante à la valeur initiale de μ, $\mu_0 = \rho_0 = -a^2$, quantité dont la valeur s'obtiendra dès lors en introduisant cette hypothèse dans l'équation (104), et si, en même temps, nous supposons nulle la valeur initiale u_0 de u correspondante à la même valeur $\mu = \mu_0$ [ce qui est évidemment permis, u étant dans cette question une simple variable auxiliaire définie par la seconde équation différentielle (103)], les deux équations (102) seront alors explicitement, en adoptant cette valeur initiale de λ comme constante d'intégration :

$$(105)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}}, \\ &\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{\lambda + a^2}{\sqrt{f(\lambda)}} d\lambda + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{\mu + a^2}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu = \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0 + a^2}{\sqrt{f(\lambda_0)}} d\lambda_0 + u. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on établit d'une façon générale, entre les deux variables ρ et ω, la relation

$$(106)\qquad \int_{-a^2}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \frac{1}{g}\,\omega = \frac{2}{in}\,\omega, \qquad k = \frac{il}{n},$$

le coefficient g et le module k étant ainsi, par hypothèse, précisément les valeurs (94), c'est-à-dire, plus simplement, si l'on écrit ρ au lieu de λ et $\frac{\omega}{g}$ à la place de ω dans l'équation (93bis), les valeurs (93ter), qui en sont la conséquence, devenant alors

$$(107)\qquad a^2 + \rho = l^2 \operatorname{sn}^2 \omega, \qquad b^2 + \rho = -l^2 \operatorname{cn}^2 \omega, \qquad c^2 + \rho = n^2 \operatorname{dn}^2 \omega,$$

il suit de là que, si l'on introduit, à la place de λ, μ, et λ_0, trois nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 définies respectivement par les trois relations de la forme en question (106), savoir

$$(108)\qquad \int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \frac{2}{in}\,\varphi, \qquad \int_{-a^2}^{-\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \frac{2}{in}\,\psi, \qquad \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}} = \frac{2}{in}\,\lambda_0,$$

l'on aura, en premier lieu, simultanément les valeurs

$$(109)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} a^2 + \lambda = l^2 \operatorname{sn}^2 \varphi, & b^2 + \lambda = -l^2 \operatorname{cn}^2 \varphi, & c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2 \varphi, \\ a^2 + \mu = l^2 \operatorname{sn}^2 \psi, & b^2 + \mu = -l^2 \operatorname{cn}^2 \psi, & c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2 \psi, \\ a^2 + \lambda_0 = l^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0, & b^2 + \lambda_0 = -l^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_0, & c^2 + \lambda_0 = n^2 \operatorname{dn}^2 \varphi_0, \end{array} \right.$$

et, partant de là, les deux équations ci-dessus (105) se transformeront dans les suivantes

$$(110)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{in}\,\varphi + \frac{2}{in}\,\psi = \frac{2}{in}\,\varphi_0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_0 = \varphi + \psi, \\ \text{et} \\ \int_0^{\varphi} l^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \,.\, \frac{2}{in}\, d\varphi + \int_0^{\psi} l^2 \operatorname{sn}^2 \psi \,.\, \frac{2}{in}\, d\psi = \int_0^{\lambda_0} l^2 \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \,.\, \frac{2}{in}\, d\varphi_0 + u, \end{array} \right.$$

dont la seconde deviendra, étant divisée par $2in$,

$$\int_0^\varphi \frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2\varphi\, d\varphi + \int_0^\psi \frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2\psi\, d\psi = \int_0^{\lambda_0} \frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2\varphi_0\, d\varphi_0 + \frac{1}{2in}\,u,$$

et pourra, par conséquent, en tenant compte de la première en même temps que de la valeur (106) admise pour le module k, être écrite, à l'aide du type introduit par Jacobi pour la fonction de deuxième espèce,

$$(111)\qquad Z(\varphi) + Z(\psi) = Z(\varphi+\psi) + \frac{1}{2in}\,u.$$

Enfin, pour calculer le dernier terme de cette égalité, qui reste désormais seul inconnu, il suffira évidemment d'avoir recours au procédé que nous employons dans le premier paragraphe de cette Note, et consistant à introduire comme constante d'intégration, à la place des constantes α, β liées entre elles par la relation (82bis), la valeur initiale λ_0 de λ pour $\mu = \mu_0 = -a^2$, en déterminant dès lors ces constantes α, β par les deux équations qui tiennent lieu pour le cas actuel des équations (29) dudit paragraphe,

$$(112)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad (\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 = m^2\alpha^2 - n^2\beta^2,$$

et remettant alors les valeurs ainsi obtenues dans l'équation

$$(113)\qquad u = 2\left[\alpha(X - X_0) + \beta(Y - Y_0)\right],$$

qui représente l'équation ci-dessus (99), en y introduisant l'hypothèse $u_0 = 0$ que nous avons admise un peu plus haut (p. 219).

Effectuant donc ce calcul, nous trouverons d'abord pour expression des quantités X_0, Y_0, en ayant égard successivement aux définitions (83) de X, Y, puis aux valeurs de la dernière ligne (109), et enfin à la première équation de droite (110),

$$(114)\qquad \begin{cases} X_0 = \sqrt{\dfrac{(a^2+\lambda_0)(a^2+\mu_0)}{a^2-b^2}} = 0, \\[2ex] Y_0 = \sqrt{\dfrac{(b^2+\lambda_0)(b^2+\mu_0)}{b^2-a^2}} = \sqrt{b^2+\lambda_0} = \sqrt{-l^2\,\mathrm{cn}^2\varphi_0} = il\,\mathrm{cn}(\varphi+\psi); \end{cases}$$

et dès lors, les deux équations précédentes (112) se réduisant, en vertu de la première de ces valeurs, à

$$(115)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad \alpha^2 (Y_0^2 - m^2) + n^2\beta^2 = 0,$$

d'où, en éliminant β, puis ayant égard à la première relation (74),

$$\alpha^2 (Y_0^2 - m^2 - n^2) = -n^2, \qquad \alpha^2 = \frac{-n^2}{Y_0^2 - (m^2 + n^2)} = \frac{-n^2}{Y_0^2 + l^2},$$

ces mêmes équations donneront donc, en tenant compte de la seconde valeur (114) ainsi que de celle (106) du module k,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{-n^2}{-l^2 \operatorname{cn}^2(\varphi+\psi) + l^2} = \frac{1}{\frac{l^2}{-n^2}\left[1 - \operatorname{cn}^2(\varphi+\psi)\right]} = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)}, \\ \beta^2 &= 1 - \alpha^2 = 1 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)} = \frac{-\left[1 - k^2\operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\right]}{k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)} = \frac{-\operatorname{dn}^2(\varphi+\psi)}{k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire finalement les deux valeurs très simples

$$(116)\qquad \alpha = \frac{1}{k \operatorname{sn}(\varphi+\psi)}, \qquad \beta = \frac{i \operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{k \operatorname{sn}(\varphi+\psi)}.$$

D'autre part, les expressions (83) de X et Y devenant en même temps, par la substitution des valeurs des deux premières lignes (109),

$$(117)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{l^2 \operatorname{sn}^2\varphi \,.\, l^2 \operatorname{sn}^2\psi}{l^2}} = l \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi, \\ Y &= \sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{(-l^2 \operatorname{cn}^2\varphi)(-l^2 \operatorname{cn}^2\psi)}{-l^2}} = il \operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi, \end{aligned}\right.$$

l'expression (113) qu'il s'agit de calculer deviendra donc, par la substitution des trois groupes de valeurs (116), (117), et (114)

ainsi obtenus,

$$(118)\quad \begin{cases} u = 2\left[\alpha(X - X_0) + 6(Y - Y_0)\right] \\ \quad = \dfrac{2}{k \operatorname{sn}(\varphi + \psi)}\left[l \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi + i \operatorname{dn}(\varphi + \psi)\right\} il \operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi - il \operatorname{cn}(\varphi + \psi)\left\{\right] \\ \quad = \dfrac{2l.N}{k \operatorname{sn}(\varphi + \psi)}, \end{cases}$$

en faisant pour un instant

$$N = \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi - \operatorname{dn}(\varphi + \psi)\left[\operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi - \operatorname{cn}(\varphi + \psi)\right],$$

quantité qui deviendra elle-même successivement, par le moyen de transformations évidentes,

$$N = \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi - \operatorname{dn}(\varphi + \psi)\left[\operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi - \frac{\operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi - \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\varphi \operatorname{dn}\psi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2\psi}\right]$$

$$= \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi - \frac{\operatorname{dn}(\varphi + \psi)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2\psi}\left[\operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi (1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2\psi) - (\operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi - \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\varphi \operatorname{dn}\psi)\right]$$

$$= \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \left[1 - \operatorname{dn}(\varphi + \psi)\frac{\operatorname{dn}\varphi \operatorname{dn}\psi - k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{cn}\psi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2\psi}\right]$$

$$= \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \left[1 - \operatorname{dn}^2(\varphi + \psi)\right] = \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi . k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + \psi),$$

et dont la valeur, étant reportée dans le dernier membre des égalités précédentes (118) en même temps que la valeur (106) de k, fournira donc, pour la valeur cherchée de u, l'expression

$$(119)\qquad u = \frac{2l.\operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi . k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + \psi)}{\frac{il}{n}\operatorname{sn}(\varphi + \psi)} = -2ink^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi + \psi),$$

laquelle enfin étant remise à son tour au second membre de l'égalité trouvée tout à l'heure (111), la transformera elle-même

dans la suivante

$$Z(\varphi) + Z(\psi) = Z(\varphi + \psi) - k^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} (\varphi + \psi),$$

ou

$$(120) \qquad Z(\varphi + \psi) = Z(\varphi) + Z(\psi) + k^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} (\varphi + \psi),$$

qui est bien la formule d'addition donnée par Jacobi pour la fonction de deuxième espèce.

B. Semblablement, pour retrouver la formule analogue relative à la fonction elliptique de troisième espèce, il suffira d'appliquer à l'intégrale empruntée à cette catégorie $\int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho$ le même théorème d'Abel, supposé pris cette fois sous la seconde forme où nous le présentons dans le paragraphe I de cette Note, en effectuant pour cela de point en point sur ce type particulier d'intégrale toute la série des opérations et des calculs que nous indiquons successivement dans la démonstration du théorème en question.

En effet, supposant toujours, comme tout à l'heure, les trois variables λ, μ, et u liées entre elles par le système différentiel (103), et, par conséquent, en quantités finies, par la double forme d'intégrale consistant, sous forme transcendante dans les deux équations (102), et sous forme algébrique dans les deux équations (104) et (99), la quadrature précitée

$$\int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho = \int \frac{\rho - r + a^2 + r}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \int \frac{a^2 + r}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

donnera donc, en ajoutant les deux identités semblables pour $\rho = \lambda, \mu$, puis tenant compte de la première équation (102), naissance à l'égalité

$$(121) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho &= \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \sum_\rho (a^2 + r) \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} \\ &= W + (a^2 + r) \sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

qui représente évidemment dans la question actuelle la formule (23) de notre paragraphe I, et dans laquelle la somme qui figure au second membre étant précisément, avec une variable de moins, celle-là même qui est écrite entre parenthèses au dernier terme de ladite formule (23), sera donc fournie encore par la formule (25bis) réduite à la même hypothèse de deux variables λ et μ seulement, c'est-à-dire dans laquelle $F(\rho)$ étant supposée remplacée par $f(\rho)$, les coefficients G_r, H_r, K_r seront toujours, d'après l'équation de définition (25), ceux de l'équation en u obtenue en égalant à zéro la fonction $\mathcal{F}(r)$, ou ce qui revient au même la fonction $-\mathcal{F}(r)$, dont l'expression sera, dans le cas actuel, d'après l'équation sans numéro qui précède l'équation (25),

$$-\mathcal{F}(r) = (a^2+r)(b^2+r)\left[\frac{(A'u+A'')^2}{a^2+r} + \frac{(B'u+B'')^2}{b^2+r} - 1\right]$$

$$= (b^2+r)(A'u+A'')^2 + (a^2+r)(B'u+B'')^2 - (a^2+r)(b^2+r)$$

$$= \left[(b^2+r)A'^2 + (a^2+r)B'^2\right]u^2 + 2\left[(b^2+r)A'A'' + (a^2+r)B'B''\right]u$$

$$+ (b^2+r)A''^2 + (a^2+r)B''^2 - \varphi(r),$$

eu égard à la définition (77) du symbole $\varphi(\rho)$. C'est-à-dire, par conséquent, que ces coefficients seront ici respectivement les quantités

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} G_r &= (b^2+r)A'^2 + (a^2+r)B'^2, \\ H_r &= (b^2+r)A'A'' + (a^2+r)B'B'', \\ K_r &= (b^2+r)A''^2 + (a^2+r)B''^2 - \varphi(r), \end{aligned}\right.$$

et avec ces expressions, les racines p_r et q_r étant toujours

$$(123)\quad p_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r + \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right], \qquad q_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r - \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right],$$

la formule précitée (25bis), dans laquelle, avons-nous dit, $F(\rho)$ doit être remplacée par $f(\rho)$ et le coefficient d par $\frac{1}{2}$ (page 218), donnera alors, en prenant l'intégrale entre les limites $\rho_0 = -a^2$

et ρ, eu égard à l'hypothèse admise antérieurement $v_0 = 0$ (page 219),

$$(124)\qquad \sum_p \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{H_r^2 - G_r K_r}}\left[\log\frac{u - p_r}{u - q_r} - \log\frac{p_r}{q_r}\right]$$

Cela posé, il sera facile, dans ce cas simple, de déterminer les constantes A′, B′, A″, B″, qui figurent dans les expressions (122), car, si l'on a égard à la valeur (114) $X_0 = 0$, l'équation (104) donnant, en y faisant $\mu = \mu_0 = -a^2$,

$$(125)\qquad -\alpha Y_0 = m^2 a^2 - n^2 6^2,$$

la même équation étant récrite, en même temps que l'équation (113), en tenant compte de ces valeurs, ainsi qu'il suit

$$\alpha X + 6Y = \frac{1}{2}u + 6Y_0, \qquad 6X - \alpha Y = -\alpha Y_0^1,$$

ces deux équations donneront, eu égard à la condition (82bis),

$$X = \alpha\left(\frac{1}{2}u + 6Y_0\right) - \alpha 6 Y_0, \qquad Y = \alpha^2 Y_0 + 6\left(\frac{1}{2}u + 6Y_0\right),$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant, les expressions

$$X = \frac{1}{2}\alpha u, \qquad Y = \frac{1}{2}6u + Y_0,$$

qui, rapprochées des formules (21), assignent aux coefficients en question, pour le cas actuel, les valeurs

$$A' = \frac{1}{2}\alpha, \qquad A'' = 0, \qquad B' = \frac{1}{2}6, \qquad B'' = Y_0,$$

en vertu desquelles les expressions ci-dessus (122) des coefficients de l'équation envisagée deviennent

$$(126)\qquad \left\{\begin{aligned} &G_r = \frac{1}{4}\left[(b^2 + r)\alpha^2 + (a^2 + r)6^2\right] = \frac{1}{4}(b^2\alpha^2 + a^2 6^2 + r),\\ &H_r = (a^2 + r)\cdot\frac{1}{2}6Y_0, \qquad K_r = (a^2 + r)Y_0^2 - \varphi(r),\end{aligned}\right.$$

et donneront dès lors successivement

$$G_rK_r = \frac{1}{4}\left[(b^2 + r)\alpha^2 + (a^2 + r)6^2\right]\left[(a^2 + r)Y_0^2 - \varphi(r)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(a^2 + r)(b^2 + r)\alpha^2Y_0^2 + (a^2 + r)^2 6^2Y_0^2\right] - G_r\varphi(r),$$

$$H_r^2 - G_rK_r = (a^2 + r)^2 . \frac{1}{4}6^2Y_0^2 - \left[\frac{1}{4}(a^2 + r)^2 6^2Y_0^2 + \varphi(r)\left(\frac{1}{4}\alpha^2Y_0^2 - G_r\right)\right]$$

$$= \varphi(r)\left(G_r - \frac{1}{4}\alpha^2Y_0^2\right),$$

c'est-à-dire, en ayant égard, d'abord à la valeur (125) et à l'expression de la première quantité (126), puis aux définitions (56),

$$H_r^2 - G_rK_r = \varphi(r)\left[\frac{1}{4}(b^2\alpha^2 + a^2 6^2 + r) - \frac{1}{4}(m^2\alpha^2 - n^2 6^2)\right]$$

$$= \varphi(r)\left[\tfrac{1}{2}b^2 - (b^2 - c^2)\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + (c^2 - a^2)\tfrac{1}{2}6^2 + r\right]$$

$$= \frac{1}{4}\varphi(r)\left[c^2(\alpha^2 + 6^2) + r\right] = \frac{1}{4}(a^2 + r)(b^2 + r)(c^2 + r) = \frac{1}{4}f(r).$$

Partant donc de cette valeur, les deux racines p_r et q_r (123) étant alors

$$p_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r + \frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right], \qquad q_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r - \frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]$$

le second facteur, entre crochets, de l'expression (124) qu'il s'agit de calculer sera

$$\log\frac{u - p_r}{u - q_r} - \log\frac{p_r}{q_r} = \log\frac{(u - p_r)q_r}{(u - q_r)p_r} = \log\frac{q_r u - \frac{K_r}{G_r}}{p_r u - \frac{K_r}{G_r}}$$

$$= \log\frac{G_r q_r . u - K_r}{G_r p_r . u - K_r} = \log\frac{-\left[H_r + \frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]u - K_r}{-\left[H_r - \frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]u - K_r}$$

$$= \log\frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)} . u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)} . u},$$

et par conséquent l'expression en question deviendra elle-même la suivante :

$$(127)\qquad \sum_{\rho} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} = \frac{-1}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}\, u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}\, u}.$$

Ce résultat étant obtenu, la formule (121), qui constitue le point de départ de notre calcul, en y supposant introduite cette dernière expression, deviendra elle-même la suivante

$$(128)\qquad \sum_{\rho} \int^{\rho} \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = W - \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u} + \text{const.},$$

qui représentera, pour le cas actuel, la formule (26) de notre paragraphe I, et dès lors il suffira d'y remplacer la variable u par sa valeur présente,

$$(129)\qquad u = 2\left[\alpha X + \beta(Y - Y_0)\right]$$

pour avoir la formule (28) du même paragraphe relative au cas particulier que nous examinons.

Cette substitution étant supposée réalisée, il faudra ensuite, pour obtenir définitivement la formule (32) relative au même cas, qui exprimera pour ce cas le théorème d'Abel sous la seconde forme où nous l'avons présenté, il faudra, disons-nous, effectuer successivement les deux opérations que nous avons spécifiées aux pages 170 et 172, et cela dans un ordre quelconque d'ailleurs, car il est bien clair, d'après l'exposé de notre théorie, que le résultat final sera dans les deux hypothèses absolument le même.

En commençant donc ici par la seconde qui consiste à éliminer la constante additive du résultat ci-dessus (128), et prenant dans ce but toutes les intégrales à partir de la limite inférieure $\rho_0 = -a^2$, il est clair que le résultat (128) fournira, sous forme

explicite, la nouvelle égalité

$$(130)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{\lambda + a^2}{\lambda - r} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{\mu + a^2}{\mu - r} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} - \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0 + a^2}{\lambda_0 - r} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}} \\ \displaystyle\qquad = -\frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u}, \end{cases}$$

du moment que le second membre que nous venons d'écrire représente lui-même, à un facteur constant près, l'intégrale définie (127), dont les limites sont précisément $\rho_0 = -a^2$ et ρ.

Puis, cela fait, l'on devra accomplir également sur ce dernier résultat la première opération susmentionnée, c'est-à-dire y remplacer les constantes d'intégration α et β par leurs valeurs en fonction de la valeur initiale λ_0 fournies par le système des deux équations (112) ou (115), substitution qu'il faudra effectuer tant dans l'expression précédente (129) de u que dans celles (126) de H_r et K_r, du moment que ces constantes α et β y interviennent également.

Cela étant, d'une part, en vue de profiter pour ce dernier calcul des résultats déjà obtenus tout à l'heure dans notre recherche relative à la fonction de deuxième espèce, nous introduirons de nouveau, comme alors, à la place des variables λ, μ, et λ_0, les nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 définies par les équations (108), auquel cas, la première équation (102) ou (105) se changeant alors dans l'équation de droite de la première ligne (110), les valeurs de λ, μ, et λ_0 en fonction de ces variables seront de nouveau celles fournies par les équations de gauche (109) où φ_0 représentera la somme $\varphi + \psi$, et donneront alors, après remplacement de α, β par leurs valeurs en fonction de φ_0, tenant lieu désormais de λ_0, c'est-à-dire par leurs valeurs (116), définitivement pour expression de u celle exprimée par le dernier membre des égalités (119), savoir :

$$(131)\qquad u = -2ink^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn}(\varphi + \psi).$$

D'autre part, en vue d'arriver pour la fonction de troisième espèce à la formule correspondant exactement à celle (120) obtenue tout à l'heure pour la fonction de seconde espèce, en même temps que nous effectuerons lesdits changements de variables et la substitution de cette dernière valeur de u qui en sera la conséquence, partant alors de ce fait que le type de quadrature envisagé peut être mis sous la forme

$$(132)\qquad \int \frac{\rho+a^2}{\rho-r}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}=\int\frac{\rho+a^2}{\rho+a^2-(a^2+r)}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}=\int\frac{\dfrac{a^2+\rho}{a^2+r}}{\dfrac{a^2+\rho}{a^2+r}-1}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

nous changerons également de constante donnée en introduisant à la place de r le *paramètre* h défini par l'équation de même forme (sauf une constante additive) que la première (107) qui lie ρ et ω,

$$(133)\qquad a^2+r=l^2\operatorname{sn}^2(h-iK')=\frac{l^2}{k^2\operatorname{sn}^2 h}=\frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h},$$

laquelle donnera immédiatement, eu égard aux définitions (56) et à la valeur (106) de k, les trois expressions

$$(134)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sn}^2 h=\frac{-n^2}{a^2+r}=\frac{a^2-c^2}{a^2+r}, \qquad h=\operatorname{Arg\,sn}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+r}},\\ &\operatorname{cn}^2 h=1-\operatorname{sn}^2 h=1+\frac{n^2}{a^2+r}=\frac{a^2+r+(c^2-a^2)}{a^2+r}=\frac{c^2+r}{a^2+r},\\ &\operatorname{dn}^2 h=1-k^2\operatorname{sn}^2 h=1+\frac{l^2}{n^2}\frac{-n^2}{a^2+r}=\frac{a^2+r-(a^2-b^2)}{a^2+r}=\frac{b^2+r}{a^2+r},\end{aligned}\right.$$

puis, en tenant compte de la première égalité (107), pour toute variable ω supposée liée à ρ par une relation telle que (106),

$$\frac{a^2+\rho}{a^2+r}=\frac{l^2\operatorname{sn}^2\omega}{-n^2}\operatorname{sn}^2 h=\left(-\frac{l^2}{n^2}\right)\operatorname{sn}^2\omega\operatorname{sn}^2 h=k^2\operatorname{sn}^2 h\operatorname{sn}^2\omega.$$

Et dès lors, si l'on prend ω pour variable à la place de ρ, en

remettant cette dernière valeur sous le signe d'intégration au dernier membre des égalités précédentes (132), et prenant les intégrales entre les limites correspondantes, $\rho_0 = -a^2$ et ρ d'une part, et 0 et ω d'autre part, le type de quadrature proposé se trouvera par là transformé dans le suivant

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\rho + a^2}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int_0^{\omega} \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega}{k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega - 1} \frac{2}{in} d\omega$$

$$= \frac{-2}{in} \frac{\operatorname{sn} h}{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h} \int_0^{\omega} \frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega} \operatorname{sn}^2 \omega \, d\omega$$

$$= \frac{-2}{in} \frac{\frac{in}{\sqrt{a^2 + r}}}{\sqrt{\frac{c^2 + r}{a^2 + r}} \sqrt{\frac{b^2 + r}{a^2 + r}}} \Pi(\omega, h) = -2 \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \Pi(\omega, h),$$

c'est-à-dire, à un facteur constant près, dans la fonction de troisième espèce correspondante au type que nous avons considéré plus haut pour la fonction de deuxième espèce.

Appliquant en conséquence cette dernière formule à chacune des intégrales qui composent le premier membre de l'égalité (130) obtenue tout à l'heure, et dont les différentes variables, savoir λ, μ, et λ_0 sont liées par hypothèse aux nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 par les trois équations (108) qui sont chacune de la forme admise tout à l'heure entre ρ et ω, cette égalité deviendra donc, en changeant les signes des deux membres,

$$2 \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \left[\Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi_0, h)\right] = \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u},$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{\sqrt{f(r)}}{2(a^2 + r)}$, et tenant compte de la valeur $\varphi_0 = \varphi + \psi$,

$$(135) \qquad \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi + \psi, h) = \frac{1}{2} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u}$$

et dès lors, l'expression de u étant, avons-nous dit, celle (131), pour posséder la formule d'addition de cette fonction Π, il suffira désormais d'effectuer, dans l'expression de chacune des trois quantités $f(r)$, H_r, K_r, les mêmes substitutions de constantes que nous avons déjà opérées tout à l'heure en vue d'arriver à cette dernière égalité.

Pour la première tout d'abord, les trois égalités (134) donnant

$$\left\{\begin{aligned} a^2 + r &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}, \qquad b^2 + r = (a^2 + r)\operatorname{dn}^2 h = \frac{-n^2\operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}, \\ c^2 + r &= (a^2 + r)\operatorname{cn}^2 h = \frac{-n^2 \operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}, \end{aligned}\right.$$

l'on en conclura immédiatement les valeurs

$$(136)\quad f(r) = \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\,\frac{-n^2\operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}\,\frac{-n^2\operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h} = \frac{-n^6\operatorname{cn}^2 h\operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^6 h}, \qquad \sqrt{f(r)} = \frac{in^3\operatorname{cn} h\operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h},$$

puis, pour la seconde et la troisième, la seconde ligne des expressions (126) donnera semblablement, en ayant égard aux valeurs (116) et (114) de α, β, et Y_0, ainsi qu'à celle (106) du module k,

$$\left\{\begin{aligned} H_r &= (a^2 + r).\tfrac{1}{2}\beta Y_0 = \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{i\operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{k\operatorname{sn}(\varphi+\psi)}.\, il\operatorname{cn}(\varphi+\psi) \\ &= \frac{ln^2}{2k}\,\frac{\operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{\operatorname{sn}(\varphi+\psi)}\,\frac{1}{\operatorname{sn}^2 h}, \\ K_r &= (a^2 + r)Y_0^2 - \varphi(r) = (a^2+r)\left[Y_0^2 - (b^2 + r)\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\left[-l^2\operatorname{cn}^2(\varphi+\psi) + \frac{n^2\operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^4 h}\left[-l^2\left\{1 - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\right\}\operatorname{sn}^2 h + n^2\left(1 + \frac{l^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 h\right)\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^4 h}\left[n^2 + l^2\operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right] = \frac{-n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 - k^2\operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right], \end{aligned}\right.$$

et l'on conclura dès lors de ces valeurs, ainsi que de la précédente (136) de $\sqrt{f(r)}$, et de celle (131) de u,

$$\sqrt{f(r)}.u = \frac{in^3 \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn}^3 h}.(-2in)k^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi)$$

$$= \frac{2n^4}{\operatorname{sn}^3 h} k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi).\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h,$$

$$\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r = \frac{ln^2}{2k}\frac{\operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{\operatorname{sn}(\varphi+\psi)}\frac{1}{\operatorname{sn}^2 h}.(-2in)k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi)$$
$$-\frac{n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right]$$

$$= \frac{n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\Big[-\frac{1}{2k}.2\frac{il}{n}k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi).\operatorname{sn}^2 h$$
$$-\{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\}\Big]$$

$$= \frac{-n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 + k^2\{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi) - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\}\operatorname{sn}^2 h\right].$$

En remettant donc à présent ces valeurs dans l'expression du rapport qui figure sous le signe logarithme au second membre de la formule obtenue tout à l'heure (135), cette expression se transformera par là dans la suivante

$$(137) \qquad \frac{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) - \sqrt{f(r)}.u} = \frac{\mathrm{A}\operatorname{sn}^2 h + \mathrm{B} - \mathrm{C}\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\mathrm{A}\operatorname{sn}^2 h + \mathrm{B} + \mathrm{C}\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h},$$

dans laquelle nous faisons, pour abréger,

$$(138) \quad \begin{cases} \mathrm{A} = k^2\left[\operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi) - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\right], \\ \mathrm{B} = 1, \qquad \mathrm{C} = k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \end{cases}$$

et par conséquent ladite formule (135) deviendra elle-même

$$\Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi+\psi, h) = \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{A}\operatorname{sn}^2 h + \mathrm{B} - \mathrm{C}\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\mathrm{A}\operatorname{sn}^2 h + \mathrm{B} + \mathrm{C}\operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h},$$

ou, en échangeant les deux derniers termes, et intervertissant les deux membres,

$$(139)\quad \Pi(\varphi+\psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} + \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}.$$

Or, la première et la troisième des valeurs (138) donnant

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\,\mathrm{sn}\,h \pm \mathrm{C}\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h &= k^2\left[\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,.\,\mathrm{cn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{dn}(\varphi+\psi) - \mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\right]\mathrm{sn}\,h \\ &\quad \pm k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h \\ &= -k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,.\,\mathrm{sn}\,h + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\left[\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{dn}(\varphi+\psi) \pm \mathrm{sn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\right],\end{aligned}$$

l'on trouvera donc, en ayant égard de même à la seconde,

$$\begin{aligned}\mathrm{B} + \mathrm{sn}\,h\,(\mathrm{A}\,\mathrm{sn}\,h \pm \mathrm{C}\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h) &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h \\ &\quad + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,.\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\mathrm{sn}\left[h \pm (\varphi+\psi)\right],\end{aligned}$$

d'où l'on conclura dès lors, en distinguant les signes, pour les deux termes du rapport envisagé tout à l'heure (137), les valeurs

$$\left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} + \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h \\ &\qquad = \left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\left[1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)\right], \\ &\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h \\ &\qquad = \left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)\right],\end{aligned}\right.$$

et par conséquent, pour le rapport inverse qui figure dans la formule (139), la valeur suivante

$$\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} + \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 h + \mathrm{B} - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h} = \frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)},$$

laquelle, étant remise à son tour au second membre de ladite formule trouvée en dernier lieu (139), la transformera alors définitivement dans celle-ci

$$(140)\quad \Pi(\varphi+\psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)},$$

qui est bien encore la formule connue d'addition des arguments pour la fonction elliptique de troisième espèce considérée sous le type introduit par Jacobi (*).

Remarquons, avant de quitter ce sujet, qu'il nous eût suffi à la rigueur d'établir cette dernière formule seule pour posséder du même coup l'autre formule relative à la fonction de deuxième espèce ; car si, prenant ladite formule sous sa forme précédente (139), nous faisons, en tenant compte de la valeur (138) $B=1$,

$$(141)\qquad \frac{C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{A \operatorname{sn}^2 h + B} = z, \qquad \text{d'où} \qquad \lim \left(\frac{z}{h}\right)_{h=0} = \frac{C}{B} \lim \left(\frac{\operatorname{sn} h}{h}\right)_{h=0} = C;$$

le dernier terme de ladite formule (139) pourra dans ce cas être remplacé par le développement connu, savoir

$$\frac{1}{2} \log \frac{(A \operatorname{sn}^2 h + B) + C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{(A \operatorname{sn}^2 h + B) - C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots,$$

et la formule elle-même s'écrivant alors, en la divisant par h,

$$\frac{1}{h} \Pi(\varphi + \psi, h) = \frac{1}{h} \Pi(\varphi, h) + \frac{1}{h} \Pi(\psi, h) + \frac{z}{h}\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \ldots\ldots\right);$$

il résulte immédiatement de la définition même des deux symboles Π et Z, qu'en faisant tendre h, et par conséquent aussi z, vers zéro, puis passant à la limite, cette même formule deviendra, eu égard à la valeur de droite (141) et à celle (138) de C,

$$(142)\qquad Z(\varphi + \psi) = Z(\varphi) + Z(\psi) + k^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn}(\varphi + \psi),$$

ainsi que nous l'avons trouvé en premier lieu par un calcul direct.

Toutefois, l'économie d'écritures que nous eussions faite ainsi se fût réduite en réalité à fort peu de chose, tous les calculs qui

(*) Voir, par exemple, BRIOT et BOUQUET, *Théorie des Fonctions Elliptiques*, § 325, (2de Édition; page 514, *en haut*).

nous ont servi à établir cette dernière formule étant également nécessaires pour la démonstration de la précédente (140), en sorte qu'ils eussent dû quand même prendre place dans nos développements.

Mais, si nous n'eussions ainsi presque rien gagné comme étendue des écritures, notre exposition eût, d'autre part, certainement perdu sous le rapport de la clarté et de la facilité de la lecture, le fractionnement, entre deux propositions distinctes et successives, des développements assez compliqués qu'eût nécessités la démonstration isolée de la formule (140) ayant incontestablement pour effet de soulager l'esprit du Lecteur, en permettant à son attention un repos au milieu de la route, et de faciliter ainsi la vue nette et distincte de tous les éléments de la démonstration, ainsi que de l'enchaînement logique des raisonnements et des calculs. C'est pourquoi nous avons cru préférable d'établir séparément chacune de ces deux formules connexes (142) et (140).

V

Enfin, relativement à la fonction de troisième espèce, nous pourrons encore démontrer facilement, à l'aide de ce dernier résultat et des calculs qui nous ont servi à l'établir, trois autres formules importantes qui se rattachent étroitement à celles qui font l'objet et le but des développements ci-dessus.

Pour la première, partant de cette remarque déjà faite en son lieu (page 230) que les équations de définition posées entre les les variables ou paramètres successivement introduits, savoir ρ et ω d'une part, ou r et h de l'autre, étaient exactement de même forme sauf une constante additive, nous envisagerons la différence symétrique (au signe près) en ρ et r, de deux intégrales de troisième espèce d'un type peu différent de celui considéré plus haut, savoir

$$(145) \qquad \Delta = \int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} - \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r - \rho}.$$

Ces deux intégrales s'échangeant, comme l'on voit, l'une dans l'autre par la permutation de ρ et r, il suffira donc, pour avoir l'expression de chacune en ω et h, d'en calculer une seule, la seconde, par exemple, qui s'obtient très aisément de la façon suivante.

La première équation (133), qui définit le paramère h, étant de même forme que la première (107) que l'on peut adopter pareillement pour définition de la variable ω, entraîne dès lors évidemment deux autres semblables aux deux suivantes (107), c'est-à-dire que l'on aura simultanément les égalités

(144) $$a^2+r=l^2\,\mathrm{sn}^2(h-iK'),\quad b^2+r=-l^2\,\mathrm{cn}^2(h-iK'),\quad c^2+r=n^2\,\mathrm{dn}^2(h-iK'),$$

d'où l'on tirera dès lors, comme précédemment, les valeurs

$$f(r)=(a^2+r)(b^2+r)(c^2+r)=l^2\,\mathrm{sn}^2(h-iK').(il)^2\,\mathrm{cn}^2(h-iK').n^2\,\mathrm{dn}^2(h-iK'),$$

$$\sqrt{f(r)}=l^2.in.\mathrm{sn}\,(h-iK')\,\mathrm{cn}(h-iK')\,\mathrm{dn}(h-iK'),$$

(145) $$dr=l^2.2\,\mathrm{sn}(h-iK')\,\mathrm{cn}(h-iK')\,\mathrm{dn}\,(h-iK').dh,\qquad \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}=\frac{2}{in}dh,$$

expressions complètement parallèles à celles résultant de la même façon des égalités (107), savoir :

$$f(\rho)=(a^2+\rho)\,(b^2+\rho)\,(c^2+\rho)=l^2\,\mathrm{sn}^2\,\omega.(il)^2\,\mathrm{cn}^2\,\omega.\mathrm{dn}^2\,\omega,$$

$$\sqrt{f(\rho)}=l^2.in.\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,$$

(146) $$d\rho=l^2.2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,.d\omega,\qquad \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}=\frac{2}{in}d\omega.$$

Ces préliminaires étant admis, il résultera immédiatement de ces valeurs jointes à la deuxième (133), pour la seconde des intégrales qui composent la différence envisagée tout à l'heure (143), l'expression

$$\int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r-\rho} = \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{(a^2+r)-(a^2+\rho)} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$$

$$= \int_{iK'}^{h} \frac{l^2 . in . \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\frac{l^2}{k^2 \operatorname{sn}^2 h} - l^2 \operatorname{sn}^2 \omega} \cdot \frac{2}{in} dh = 2 \int_{iK'}^{h} \frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega . \operatorname{sn}^2 h}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 h} dh$$

$$= 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right],$$

et dès lors les équations précédentes (144) se déduisant de celles antérieures (107) en y permutant ω et $h - iK'$ en même temps que ρ et r, changement qui transforme

$$\Pi(h, \omega) = \Pi\left[(h - iK') + iK', \omega\right]$$

en $\Pi(\omega + iK', h - iK')$, l'on obtiendra donc, par cette simple permutation, la valeur de l'autre intégrale, qui sera

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right],$$

et par suite, en la remettant, ainsi que la précédente, dans l'expression de la différence envisagée (143), l'on trouvera, pour sa valeur, la suivante

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right] \\ - 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right], \end{aligned} \right.$$

qui peut être notablement simplifiée ainsi qu'il suit, à l'aide de la formule d'addition obtenue tout à l'heure (140).

En effet, cette formule pouvant être écrite aussi bien, en divisant par $\operatorname{sn}\psi$ chacun des termes de la fraction soumise au signe logarithme,

$$\Pi(\varphi + \psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2}\log \frac{\frac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h + (\varphi + \psi)\right]}{\frac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h - (\varphi + \psi)\right]},$$

elle donnera donc, pour $\psi = \pm iK'$ ou $\operatorname{sn}\psi = \operatorname{sn}(\pm iK') = \pm\infty$,

$$\Pi(\varphi \pm iK', h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\pm iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[h + (\varphi \pm iK')]}{\operatorname{sn}[h - (\varphi \pm iK')]},$$

et par conséquent, si l'on distingue les deux signes, en se rappelant que

$$\operatorname{sn}(z - iK') = \operatorname{sn}[(z + iK') - 2iK'] = \operatorname{sn}(z + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z},$$

et observant que la fonction Π est évidemment une fonction impaire, l'on aura donc les deux formules subsidiaires

$$\left\{\begin{aligned} \Pi(\varphi + iK', h) &= \Pi(\varphi, h) + \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h - \varphi)}{\operatorname{sn}(h + \varphi)}, \\ \Pi(\varphi - iK', h) &= \Pi(\varphi, h) - \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h - \varphi)}{\operatorname{sn}(h + \varphi)}, \end{aligned}\right.$$

qui donneront respectivement, la première en y changeant φ en ω et h en $h - iK'$,

$$\begin{aligned} \Pi(\omega + iK', h - iK') &= \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[(h - iK') - \omega]}{\operatorname{sn}[(h - iK') + \omega]}, \\ &= \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h + \omega)}{\operatorname{sn}(h - \omega)}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par 2,

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned} &2[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')] \\ &\qquad = 2\Pi(\omega, h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}^2(h + \omega)}{\operatorname{sn}^2(h - \omega)}, \end{aligned}\right.$$

et de même la seconde, en y écrivant simplement h à la place de φ et ω à la place de h,

$$\Pi(h - iK', \omega) = \Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(\omega - h)}{\operatorname{sn}(\omega + h)},$$

d'où, en multipliant encore par 2,

$$2\left[\Pi(h,\omega)-\Pi(i\mathrm{K}',\omega)\right]=2\,\Pi(h-i\mathrm{K}',\omega)+\frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{sn}^2(\omega+h)}{\mathrm{sn}^2(\omega-h)},$$

expression qui, étant retranchée de la précédente (148), fournira donc enfin, les termes logarithmiques se détruisant alors, pour la différence (147), qu'il s'agissait de calculer, la valeur très simple :

$$(149)\qquad \Delta=2\left[\Pi(\omega,h-i\mathrm{K}')-\Pi(h-i\mathrm{K}',\omega)\right].$$

Cette première expression étant ainsi obtenue, nous allons à présent en calculer une seconde, en appliquant à la même différence, considérée sous la forme proposée (143), une transformation remarquable, indiquée par Jacobi pour les intégrales hyperelliptiques en général, et consistant à mettre chacune de celles qui la composent sous la forme d'uneintégrale double.

A cet effet, partant de cette remarque que notre fonction f s'annule pour la limite inférieure $-a^2$ commune aux deux intégrales en question, l'on pourra donc écrire la première, par exemple, successivement sous les différentes formes :

$$\int_{-a^2}^{\rho}\frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}}\frac{d\rho}{\rho-r}=\int_{-a^2}^{\rho}\left[\frac{\sqrt{f(r)}}{\rho-r}-\frac{\sqrt{f(-a^2)}}{\rho-(-a^2)}\right]\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

$$=\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\left[\frac{\sqrt{f(r)}}{\rho-r}\right]_{r=-a^2}^{r}=\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\int_{-a^2}^{r}\frac{\dfrac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}(\rho-r)+\sqrt{f(r)}}{(\rho-r)^2}\,dr$$

$$=\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\int_{-a^2}^{r}\frac{f'(r)(\rho-r)+2f(r)}{2(\rho-r)^2}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}}.$$

Et dès lors, la seconde intégrale, étant écrite d'une façon semblable, en permutant simplement r et ρ dans ce dernier résultat, ainsi qu'il suit

$$\int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r-\rho} = \int_{-a^2}^{r} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \int_{-a^2}^{\rho} \frac{f'(\rho)(r-\rho)+2f(\rho)}{2(r-\rho)^2} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

leur différence Δ pourra maintenant, les limites étant les mêmes pour chaque variable dans ces deux expressions, être présentée sous la forme de l'intégrale double

$$(150) \qquad \Delta = \int_{-a^2}^{\rho} \int_{-a^2}^{r} \Theta \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}},$$

en désignant, pour abréger, par Θ l'expression rationnelle et symétrique (au signe près) en ρ et r,

$$(151) \qquad \Theta = \frac{[f'(\rho)+f'(r)](\rho-r)-2[f(\rho)-f(r)]}{2(\rho-r)^2},$$

laquelle se simplifie très aisément de la manière suivante.

Faisant encore, comme dans notre Chapitre V (page 372),

$$\begin{cases} f(\rho) = \rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C, & f'(\rho) = 3\rho^2 + 2A\rho + B, \\ f(r) = r^3 + Ar^2 + Br + C, & f'(r) = 3r^2 + 2Ar + B, \end{cases}$$

l'on en conclura successivement

$$\begin{aligned} f(\rho) - f(r) &= \rho^3 - r^3 + A(\rho^2 - r^2) + B(\rho - r) \\ &= (\rho - r)\left[(\rho^2 + r\rho + r^2) + A(\rho + r) + B\right], \end{aligned}$$

$$f'(\rho) + f'(r) = 3(\rho^2 + r^2) + 2A(\rho + r) + 2B,$$

$$[f'(\rho) + f'(r)](\rho - r) - 2[f(\rho) - f(r)]$$

$$= (\rho - r)\left[\{3(\rho^2+r^2)+2A(\rho+r)+2B\} - 2\{(\rho^2+r\rho+r^2) + A(\rho + r) + B\}\right]$$

$$= (\rho - r).(\rho - r)^2,$$

et par conséquent, pour la quantité Θ (151), la valeur simple

$$\Theta = \frac{(\rho - r).(\rho - r)^2}{2(\rho - r)^2} = \frac{\rho - r}{2} = \frac{1}{2}\left[(a^2 + \rho) - (a^2 + r)\right],$$

laquelle étant remise dans l'expression précédente (150) de Δ la transformera elle-même dans la suivante

$$(152)\left\{\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}\int_{-a^2}^{\rho}\int_{-a^2}^{r}\left[(a^2 + \rho) - (a^2 + r)\right]\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}}\\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-a^2}^{\rho}(a^2+\rho)\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}.\int_{-a^2}^{r}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} - \int_{-a^2}^{r}(a^2+r)\frac{dr}{\sqrt{f(r)}}.\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\right],\end{aligned}\right.$$

qu'il ne reste plus dès lors qu'à exprimer à son tour en ω et h à la place de ρ et r.

Or, cette dernière opération est encore très facile avec nos notations et les résultats des calculs développés ci-dessus.

En effet, les expressions parallèles (146) et (145) d'une part, et (107) et (144) de l'autre, donnant immédiatement, en premier lieu,

$$\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \frac{2}{in}\omega, \qquad \int_{-a^2}^{r}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{2}{in}(h - i\mathrm{K}'),$$

puis, en second lieu, eu égard à la valeur (106) du module k, comme lors des équations (110) et (111),

$$\begin{aligned}\int_{-a^2}^{\rho}(a^2+\rho)\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} &= \int_0^{\omega} l^2\,\mathrm{sn}^2\omega.\frac{2}{in}\,d\omega = 2in\int_0^{\omega}\frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2\omega\,d\omega\\ &= 2in\int_0^{\omega}k^2\,\mathrm{sn}^2\omega\,d\omega = 2in\,\mathrm{Z}(\omega),\end{aligned}$$

et d'autre part, en faisant pour un instant $h - i\mathrm{K}' = h'$,

$$\begin{aligned}\int_{-a^2}^{r}(a^2+r)\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} &= \int_{\mathrm{K}'}^{h} l^2\mathrm{sn}^2(h - i\mathrm{K}').\frac{2}{in}\,dh = 2in\int_0^{h'}\frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2h'\,dh'\\ &= 2in\,\mathrm{Z}(h') = 2in\,\mathrm{Z}(h - i\mathrm{K}'),\end{aligned}$$

il résultera donc de ces dernières valeurs, pour la différence en question (152), la nouvelle expression

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[2in\,Z(\omega).\frac{2}{in}(h - iK') - 2in\,Z(h - iK').\frac{2}{in}\,\omega\right]$$

$$= 2\left[(h - iK')\,Z(\omega) - \omega Z(h - iK')\right],$$

laquelle étant comparée à celle (149) déjà obtenue précédemment pour la même quantité, fournira par conséquent l'égalité

$$2\left[\Pi(\omega, h - iK') - \Pi(h - iK', \omega)\right] = 2\left[(h - iK')\,Z(\omega) - \omega Z(h - iK')\right],$$

ou, plus simplement, en écrivant h à la place de $h - iK'$, celle-ci

$$(153) \qquad \Pi(\omega, h) - \Pi(h, \omega) = h\,Z(\omega) - \omega\,Z(h),$$

qui est la formule connue de l'échange de l'argument et du paramètre.

De cette formule et des précédentes (140) et (142), nous pourrons alors en tirer une nouvelle, parallèle en quelque sorte à celle (140), et relative cette fois à l'addition des paramètres.

En effet, celle que nous venons d'établir à l'instant, nous donnant, en y écrivant $p + q$ à la place de h,

$$\Pi(\omega, p + q) - \Pi(p + q, \omega) = (p + q)\,Z(\omega) - \omega\,Z(p + q),$$

si nous y appliquons, d'abord au second terme de chaque membre les formules d'addition (140) et (142), puis, cela fait, aux premiers termes du second membre la même formule d'échange (153), nous aurons donc ainsi la double égalité

$$\Pi(\omega, p+q) - \left[\Pi(p, \omega) + \Pi(q, \omega) + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q+\omega)}{1 - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q-\omega)}\right]$$

$$= (p + q)\,Z(\omega) - \omega\left[Z(p) + Z(q) + k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p + q)\right]$$

$$= \left[\Pi(\omega, p) - \Pi(p, \omega)\right] + \left[\Pi(\omega, q) - \Pi(q, \omega)\right] - \omega.\,k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q),$$

laquelle, en faisant d'abord abstraction du membre intermédiaire, puis réduisant alors, et ne gardant enfin au premier membre que le premier terme seul, deviendra définitivement

$$(154)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(\omega, p+q) = \Pi(\omega, p) + \Pi(\omega, q) - k^2\omega \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) \\ + \frac{1}{2}\log\frac{1+k^2\operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q+\omega)}{1-k^2\operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q-\omega)} \end{aligned} \right.$$

ce qui est la formule d'addition des paramètres pour la fonction de troisième espèce (*).

Enfin, de cette dernière elle-même, jointe à celle relative aux arguments, l'on pourra maintenant en déduire une formule plus générale, les comprenant l'une et l'autre à titre de cas particuliers, que l'on obtiendra très aisément de la façon suivante.

Ladite formule (154), que nous venons d'établir en dernier lieu, donnant de même, en y écrivant $\varphi + \psi$ à la place de ω,

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi+\psi, p+q) = \Pi(\varphi+\psi, p) + \Pi(\varphi+\psi, q) \\ - k^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) + \frac{1}{2}\log\frac{L}{P}, \end{aligned}$$

en faisant pour abréger

$$(155)\quad \left\{ \begin{aligned} L = 1 + k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(\varphi+\psi) \operatorname{sn}[p+q+(\varphi+\psi)], \\ P = 1 - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(\varphi+\psi) \operatorname{sn}[p+q-(\varphi+\psi)], \end{aligned} \right.$$

nous aurons donc, en faisant passer pour un instant, en vue de faciliter les transformations, les deux derniers termes de l'équation dans le premier membre, puis appliquant alors aux deux seuls termes restants du second membre la première formule d'addition (140), nous aurons, disons-nous, la double égalité

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi+\psi, p+q) + k^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) - \frac{1}{2}\log\frac{L}{P} \\ = \Pi(\varphi+\psi, p) + \Pi(\varphi+\psi, q) \\ = \left[\Pi(\varphi, p) + \Pi(\psi, p) + \frac{1}{2}\log\frac{M}{Q}\right] + \left[\Pi(\varphi, q) + \Pi(\psi, q) + \frac{1}{2}\log\frac{N}{R}\right], \end{aligned}$$

(*) Briot et Bouquet, *Ibid.*, page 515, formule (33).

en faisant de nouveau, pour abréger,

$$(156)\quad \begin{cases} M = 1 + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}p \operatorname{sn}(\varphi+\psi+p), & N = 1 + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}q \operatorname{sn}(\varphi+\psi+q), \\ Q = 1 - k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}p \operatorname{sn}(\varphi+\psi-p), & R = 1 - k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}q \operatorname{sn}(\varphi+\psi-q), \end{cases}$$

ou définitivement, en ne gardant encore au premier membre que le premier terme seul,

$$(157)\quad \begin{cases} \Pi(\varphi+\psi, p+q) = \Pi(\varphi,p) + \Pi(\psi,p) + \Pi(\varphi,q) + \Pi(\psi,q) \\ \qquad - k^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}p \operatorname{sn}q \operatorname{sn}(p+q) + \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{LMN}}{\mathrm{PQR}}, \end{cases}$$

ce qui est de nouveau la formule générale d'addition relative à la fonction de troisième espèce, considérée sous le type introduit par Jacobi (*).

Il resterait encore, à la vérité, à faire voir que la fraction soumise au signe logarithme, qui, dans la formule que nous venons d'écrire, se présente sous la forme d'un produit de six facteurs peut être réduit à un produit de quatre facteurs seulement, analogues de forme aux précédents, c'est-à-dire que l'on a l'égalité, qui subsiste quels que soient φ, ψ, p, et q,

$$\left(\frac{\mathrm{LMN}}{\mathrm{PQR}}\right)^2 = \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{ST}},$$

en faisant semblablement

$$(158)\quad \begin{cases} G = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi-p)\operatorname{sn}^2(\psi-q), & H = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi-q)\operatorname{sn}^2(\psi-p), \\ S = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+p)\operatorname{sn}^2(\psi+q), & T = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+q)\operatorname{sn}^2(\psi+p). \end{cases}$$

Mais le résultat (157) que nous venons d'obtenir, suffisant parfaitement, comme l'on voit, à mettre en pleine lumière la physionomie essentielle de la formule en question, et se prêtant en l'état à telle application pratique que l'on en voudra faire,

---

(*) IBID., même page, formule (35), ou encore JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 425, formules (8) et (9) pp. 430-431.

nous ne croyons pas devoir nous arrêter ici à cette dernière transformation, qui consiste d'ailleurs en une simple opération algébrique basée sur les formules d'addition relatives aux fonctions elliptiques de première espèce, que nous avons démontrées dans notre paragraphe III.

Enfin, quelles que soient la longueur et la complication des calculs développés dans ces deux derniers paragraphes, comme ils offrent cette particularité (nous ne disons pas cet avantage) qu'ils ne supposent en aucun endroit la notion des expressions, à l'aide de quantités définies par des séries ou des produits infinis, dės trois espèces de fonctions elliptiques, nous croyons qu'il n'était pas sans intérêt (et nous espérons que cette impression sera ressentie également par le Lecteur) de déduire exclusivement les formules qui y sont démontrées de la considération des diverses intégrales qui donnent naissance aux fonctions envisagées, et d'établir ainsi ces différentes formules relatives aux fonctions de deuxième et de troisième espèce, sans faire appel à la notion plus élevée des fonctions Θ de Jacobi, sur laquelle est basée, dans tous les traités d'Analyse, la démonstration des formules en question.

NOTE VI

SUR UN AUTRE MODE DE CALCUL DES INTÉGRALES TRIPLES DÉJA DÉTERMINÉES DANS LE CHAPITRE VI.

Les intégrales triples que nous avons déterminées dans notre dernier Chapitre, l'ont été en substituant, pour le calcul de l'une de chaque type, aux coordonnées u, v, w des variables auxiliaires p, q, r définies par les équations (88) dudit Chapitre. Nous allons faire voir, dans cette dernière Note, quel genre d'opérations s'imposeraient pour les mêmes calculs si l'on voulait s'en tenir exclusivement aux coordonnées u, v, w elles-mêmes, sans s'aider du secours, soit de ces variables auxiliaires p, q, r, soit des Coordonnées Elliptiques, ainsi que nous l'avons fait pour le dernier exemple de calcul (E, page 554) à la fin de ce même Chapitre.

Nous choisirons pour cet exemple le calcul du premier type d'intégrales (96) pour l'exposant $\alpha = 1$, que nous avons déterminé dans ledit Chapitre VI, sous la rubrique : B. *Centre de gravité* (page 537).

A cet effet, l'expression (77) de l'élément de masse en Coordonnées Thermométriques devenant, en y introduisant des termes qui se détruisent, puis ayant égard aux équations (8) du Chapitre VI,

$$d\mathfrak{M} = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{G}}} \begin{vmatrix} du, & (a^2+\lambda)\,du, & (a^4+2a^2\lambda+\lambda^2)\,du \\ dv, & (a^2+\mu)\,dv, & (a^4+2a^2\mu+\mu^2)\,dv \\ dw, & (a^2+\nu)\,dw, & (a^4+2a^2\nu+\nu^2)\,dw \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{G}}} \begin{vmatrix} du, & l^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,.\,du, & [l^2\,\mathrm{sn}^2\,u]^2\,du \\ dv, & l^2\,\mathrm{dn}^2\,v\,.\,dv, & [l^2\,\mathrm{dn}^2\,v]^2.\,dv \\ dw, & (in)^2\,\mathrm{cn}^2\,w\,.\,dw, & [(in)^2\,\mathrm{cn}^2\,w]^2.\,dw \end{vmatrix},$$

donnera dès lors, étant rapprochée de la première équation (10) du même Chapitre :

$$\mathrm{I}_x^{(1)} = \mathbf{S}\, x d_x\mathfrak{M} = \mathbf{S}\, \frac{1}{l.in}\, l\,\mathrm{sn}\, u . l\,\mathrm{dn}\, v . in\,\mathrm{cn}\, w . d_x\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\mathrm{D}}{l.in.\sqrt{\mathrm{G}}}\,\mathbf{S} \begin{vmatrix} l\,\mathrm{sn}\, u.du, & l^3\mathrm{sn}^3 u.du, & l^5\mathrm{sn}^5 u.du \\ l\,\mathrm{dn}\, v.dv, & l^3\mathrm{dn}^3 v.dv, & l^5\mathrm{dn}^5 v.dv \\ in\,\mathrm{cn}\, w.dw, & (in)^3\mathrm{cn}^3 w.dw, & (in)^5\mathrm{cn}^5 w.dw \end{vmatrix}.$$

Introduisant donc les notations suivantes pour une variable quelconque ω

$$(1)\qquad \Omega_m = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{sn}^m\,\omega\, d\omega, \qquad \Omega'_m = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{dn}^m\,\omega\, d\omega, \qquad \Omega''_m = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{cn}^m\,\omega\, d\omega;$$

$$(2)\qquad \overline{\Omega}_m = \mathrm{sn}^m\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega, \qquad \overline{\Omega}'_m = \mathrm{dn}^m\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,\omega, \qquad \overline{\Omega}''_m = \mathrm{cn}^m\,\omega\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,$$

et convenant en outre, lorsque l'on écrira dans ces égalités successivement u, v, w à la place de ω, d'y remplacer toujours en même temps Ω par la majuscule correspondante U, V, W, l'expression précédente pourra être représentée, à l'aide de ces notations, sous forme plus concise, à l'aide des deux égalités

$$(3)\qquad \mathrm{I}_x^{(1)} = \frac{1}{2^6}\,\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\,\frac{\Delta_x^{(1)}}{l.in}, \qquad \Delta_x^{(1)} = \begin{vmatrix} l\mathrm{U}_1, & 2^2 l^3\mathrm{U}_3, & 2^4 l^5\mathrm{U}_5 \\ l\mathrm{V}'_1, & 2^2 l^3\mathrm{V}'_3, & 2^4 l^5\mathrm{V}'_5 \\ in\mathrm{W}''_1, & 2^2(in)^3\mathrm{W}''_3, & 2^4(in)^5\mathrm{W}''_5 \end{vmatrix},$$

tous les éléments de ce déterminant $\Delta_x^{(1)}$ appartenant, sauf des coefficients constants, aux types (1) précédents, que nous allons en conséquence indiquer tout d'abord le moyen de calculer.

a. (*Types* Ω_m). — Dans ce but, pour le premier type, posant

$$(3^{\text{bis}})\qquad \mathrm{sn}\,\omega = x, \qquad \omega = \mathrm{Arg\,sn}\, x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad d\omega = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

puis faisant, pour abréger,

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2) = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4, \quad X' = -2(1 + k^2)x + 4k^2x^3,$$

nous partirons de l'identité

$$d\left(x^m\sqrt{X}\right) = \left(mx^{m-1}\sqrt{X} + x^m \frac{X'}{2\sqrt{X}}\right)dx = x^{m-1}\left(mX + \frac{1}{2}xX'\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= x^{m-1}\left[m\left\{1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4\right\} - (1 + k^2)x^2 + 2k^2x^4\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= x^{m-1}\left[m - (m + 1)(1 + k^2)x^2 + (m + 2)k^2x^4\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= m\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{X}} - (m + 1)(1 + k^2)\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{X}} + (m + 2)k^2\frac{x^{m+3}\,dx}{\sqrt{X}},$$

laquelle donnera dès lors, d'abord en intégrant,

$$(3^{ter}) \quad x^m\sqrt{X} = m\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{X}} - (m + 1)(1 + k^2)\int\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{X}} + (m + 2)k^2\int\frac{x^{m+3}\,dx}{\sqrt{X}},$$

puis en revenant à la variable primitive ω,

$$\mathrm{sn}^m\omega.\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega = m\int\mathrm{sn}^{m-1}\omega.d\omega - (m + 1)(1 + k^2)\int\mathrm{sn}^{m+1}\omega.d\omega$$
$$+ (m + 2)k^2\int\mathrm{sn}^{m+3}\omega.d\omega.$$

Par conséquent, en prenant chaque terme entre les limites données ω_1 et ω_2, et écrivant le résultat à l'aide de nos notations (1) et (2), nous aurons la formule de réduction

$$\overline{\Omega}_m = m\,\Omega_{m-1} - (m + 1)(1 + k^2)\,\Omega_{m+1} + (m + 2)k^2\,\Omega_{m+3},$$

qui, donnant l'expression

$$(4) \quad \Omega_{m+3} = \frac{1}{(m + 2)k^2}\left[-m\Omega_{m-1} + (m + 1)(1 + k^2)\,\Omega_{m+1} + \overline{\Omega}_m\right],$$

permettra de ramener de proche en proche le calcul de l'intégrale Ω_n, n désignant un entier positif quelconque, à celui des deux seules intégrales

$$(5)\qquad \Omega_0 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = (\omega)_1^2, \qquad \Omega_2 = \frac{1}{k^2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} k^2 \operatorname{sn}^2\omega\, d\omega = \frac{1}{k^2}\left[Z(\omega)\right]_1^2,$$

si n est pair, et si n est impair, en faisant alors $m = 0$, à celui de la seule intégrale :

$$(6)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \displaystyle\int_{\omega}^{\omega_2} \operatorname{sn}\omega\, d\omega = \frac{i}{k}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{-ik \operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}\, d\omega = \frac{i}{k}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{ik\,.\,d\operatorname{cn}\omega}{\sqrt{1-k^2(1-\operatorname{cn}^2\omega)}} \\ \qquad = \displaystyle\frac{i}{k}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\,.\,ik\operatorname{cn}\omega}{\sqrt{k_1^2-(ik\operatorname{cn}\omega)^2}} = \frac{i}{k}\left[\operatorname{arc}\sin\left(\frac{ik}{k_1}\operatorname{cn}\omega\right)\right]_1^2. \end{cases} \quad (*)$$

(*) L'on arriverait à une expression de forme assez différente en apparence si, pour effectuer cette quadrature, l'on s'en tenait à la forme de différentielle algébrique telle que celles qui figurent au second membre de la formule de réduction primitive (3ter), procédé qui pourra sembler plus naturel que d'y introduire, ainsi que nous l'avons fait, le sinus d'amplitude. Comme cette dissemblance entre les deux résultats ainsi successivement obtenus par deux voies différentes, pourrait inspirer au Lecteur quelque défiance au sujet de l'exactitude de celui (6) que nous donnons ci-dessus, nous croyons utile de montrer qu'il n'y a dans ce fait qu'une simple apparence, et que les deux expressions en question sont en réalité parfaitement équivalentes.

Pour le faire voir, conservant donc la variable x définie par les égalités (3bis), l'intégrale indéfinie

$$\int \operatorname{sn}\omega\, d\omega = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

se calculera très aisément en faisant $x^2 = z$, d'où $xdx = \frac{1}{2}\, dz$, car ayant ainsi successivement

$$(1-z)(1-k^2z) = 1-(1+k^2)z+k^2z^2 = 1-\frac{(1+k^2)^2}{4k^2}+\left(\frac{1+k^2}{2k}-kz\right)^2$$

$$= \frac{4k^2-(1+k^2)^2}{4k^2}+\left(\frac{1+k^2-2k^2z}{2k}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4k^2}\left[-(1-k^2)^2+(1+k^2-2k^2z)^2\right],$$

$$\sqrt{(1-z)(1-k^2z)} = \frac{ik}{2k^2}\sqrt{(1-k^2)^2-(1+k^2-2k^2z)^2},$$

b'. (*Types* Ω'_m *et* Ω''_m). — Pour les deux autres types (1), il sera nécessaire de distinguer deux cas, suivant que m sera pair ou impair.

Si $m = 2n$, leur calcul se ramènera immédiatement à

---

l'on trouvera donc, avec les variables introduites à tour de rôle,

$$\int \operatorname{sn} \omega \, d\omega = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\frac{ik}{2k^2}\sqrt{(1-k^2)^2-(1+k^2-2k^2z)^2}} = \frac{i}{2k}\int \frac{-2k^2 . dz}{\sqrt{(1-k^2)^2-(1+k^2-2k^2z)^2}}$$

$$= \frac{i}{2k} \arcsin \frac{1+k^2-2k^2z}{1-k^2} + C = \frac{i}{2k} \arcsin \frac{1-k^2+2k^2(1-z)}{1-k^2} + C$$

$$= \frac{i}{2k} \arcsin \left(1 + 2\frac{k^2}{k_1^2} \operatorname{cn}^2 \omega\right) + C,$$

et fournirait par conséquent pour la quantité Ω_1 l'expression

$$\Omega_1 = \frac{i}{2k}\left[\arcsin \left(1 + 2\frac{k^2}{k_1^2} \operatorname{cn}^2 \omega\right)\right]_1^2,$$

qui semble au premier abord entièrement différente de l'expression (6) obtenue ci-dessus.

Nous aurons fait disparaître aisément cette apparente contradiction, si nous montrons que les deux intégrales indéfinies (la constante étant sous-entendue, pour plus de simplicité, dans chacune)

$$(\alpha) \qquad X_1 = \frac{i}{2k} \arcsin \left(1 + 2\frac{k^2}{k_1^2} \operatorname{cn}^2 \omega\right), \qquad Y_1 = \frac{i}{k} \arcsin \left(\frac{ik}{k_1} \operatorname{cn} \omega\right),$$

ne diffèrent que par une constante, car il est bien clair que les intégrales définies correspondantes relatives aux mêmes limites, supérieures et inférieures, de la variable ω seront alors rigoureusement égales.

En effet, les définitions qui précèdent de X_1 et Y_1 donnant immédiatement

$$\sin \frac{2k}{i} X_1 = 1 + 2\frac{k^2}{k_1^2} \operatorname{cn}^2 \omega, \qquad \sin \frac{k}{i} Y_1 = \frac{ik}{k_1} \operatorname{cn} \omega,$$

l'on conclura successivement de ces deux égalités

$$(\beta) \qquad \sin \frac{2k}{i} X_1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{k}{i} Y_1 = \cos 2\frac{k}{i} Y_1,$$

celui que nous venons d'effectuer, attendu que l'on aura dans ce cas

$$
(7)\quad
\begin{cases}
\mathrm{dn}^{2n}\omega = (\mathrm{dn}^2\omega)^n = (1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\omega)^n \\
\quad = 1 - \frac{n}{1}k^2\mathrm{sn}^2\omega + \frac{n(n-1)}{1.2}k^4\mathrm{sn}^4\omega - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}k^6\mathrm{sn}^6\omega \\
\quad + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}k^{2(n-1)}\,\mathrm{sn}^{2(n-1)}\omega + (-1)^n k^{2n}\,\mathrm{sn}^{2n}\omega, \\
\mathrm{cn}^{2n}\omega = (\mathrm{cn}^2\omega)^n = (1 - \mathrm{sn}^2\omega)^n \\
\quad = 1 - \frac{n}{1}\mathrm{sn}^2\omega + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{sn}^4\omega - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{sn}^6\omega \\
\quad + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}\mathrm{sn}^{2(n-1)}\omega + (-1)^n\,\mathrm{sn}^{2n}\omega,
\end{cases}
$$

$$
(\gamma)\quad
\begin{cases}
\cos^2\frac{2k}{i}X_1 = 1 - \sin^2\frac{2k}{i}X_1 = 1 - \left(1 + 2\frac{k^2}{k_1^2}\mathrm{cn}^2\omega\right)^2 \\
\quad = 1 - \left(1 + 4\frac{k^2}{k_1^2}\mathrm{cn}^2\omega + 4\frac{k^4}{k_1^4}\mathrm{cn}^4\omega\right) \\
\quad = -4\frac{k^2}{k_1^2}\mathrm{cn}^2\omega.\left(1 + \frac{k^2}{k_1^2}\mathrm{cn}^2\omega\right) = 4\sin^2\frac{k}{i}Y_1\left(1 - \sin^2\frac{k}{i}Y_1\right) \\
\quad = 4\sin^2\frac{k}{i}Y_1\cos^2\frac{k}{i}Y_1 = \sin^2 2\frac{k}{i}Y_1.
\end{cases}
$$

Comme il résulte de ces dernières expressions (γ) et (6) que l'on pourra prendre dans la définition (α) de X_1 l'arc sinus de telle sorte que l'on ait à la fois

$$\cos\frac{2k}{i}X_1 = -\sin\frac{2k}{i}Y_1, \qquad \sin\frac{2k}{i}X_1 = \cos\frac{2k}{i}Y_1,$$

il s'ensuivra donc l'égalité

$$\sin\frac{2k}{i}(X_1 - Y_1) = \sin\frac{2k}{i}X_1\cos\frac{2k}{i}Y_1 - \cos\frac{2k}{i}X_1\sin\frac{2k}{i}Y_1$$

$$= \cos^2\frac{2k}{i}Y_1 + \sin^2\frac{2k}{i}Y_1 = 1,$$

d'où résultera par conséquent celle-ci

$$\frac{2k}{i}(X_1 - Y_1) = 2m\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{ou} \qquad X_1 - Y_1 = \text{const},$$

qui constitue précisément le fait qu'il suffisait d'établir.

d'où, en multipliant par $d\omega$, puis intégrant entre les limites ω_1 et ω_2, les expressions

(*)

$$(7^{\text{bis}})\quad \begin{cases} \Omega'_{2n} = \Omega_0 - \frac{n}{1} k^2\Omega_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} k^4\Omega_4 - \frac{n'n-1)(n-2)}{1.2.3} k^6\Omega_6 + \ldots\ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{n}{1} k^{2(n-1)}\Omega_{2n-2} + (-1)^n k^{2n}\Omega_{2n}, \\ \Omega''_{2n} = \Omega_0 - \frac{n}{1}\Omega_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Omega_4 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Omega_6 + \ldots\ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}\Omega_{2n-2} + (-1)^n\Omega_{2n}. \end{cases}$$

Si, au contraire, $m = 2n + 1$, faisant de nouveau

$$\mathrm{sn}^2\omega = z, \qquad \mathrm{cn}\,\omega = \sqrt{1-z}, \qquad \mathrm{dn}\,\omega = \sqrt{1-k^2z}, \qquad 2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,d\omega = dz,$$

$$\mathrm{dn}\,\omega\,d\omega = \frac{dz}{2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega} = \frac{dz}{2\sqrt{z}\sqrt{1-z}}, \qquad \mathrm{cn}\,\omega\,d\omega = \frac{dz}{2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega} = \frac{dz}{2\sqrt{z}\sqrt{1-k^2z}},$$

on aura donc, eu égard aux développements déjà envisagés (7),

$$\begin{cases} \mathrm{dn}^{2n+1}\omega\,d\omega = \mathrm{dn}^{2n}\omega\,.\,\mathrm{dn}\,\omega\,d\omega \\ \quad = \left[1 - \frac{n}{1}k^2z + \frac{n(n-1)}{1.2}k^4z^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}k^6z^3 \right. \\ \qquad \left. + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}k^{2(n-1)}z^{n-1} + (-1)^n k^{2n}z^n\right]\frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}, \\ \mathrm{cn}^{2n+1}\omega\,d\omega = \mathrm{cn}^{2n}\omega\,.\,\mathrm{cn}\,\omega\,d\omega \\ \quad = \left[1 - \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3 \right. \\ \qquad \left. + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}z^{n-1} + (-1)^n z^n\right]\frac{dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}}, \end{cases}$$

(*) Nous avons donné dans notre Chapitre VI l'expression générale des quadratures Ω_m pour toute valeur entière et positive de l'exposant m [voir la note de la page 505, formules (ε) et (η) de cette note]. On doit donc considérer dès lors celle des quadratures

et par conséquent, si l'on convient encore de faire, quel que soit l'entier n,

$$(8)\qquad Z'_n = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^n dz}{2\sqrt{z(1-z)}}, \qquad Z''_n = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^n dz}{2\sqrt{z(1-k^2 z)}},$$

les égalités précédentes donneront, en les intégrant entre les limites ω_1 et ω_2, et faisant usage encore des notations (1), les formules

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega'_{2n+1} &= Z'_0 - \frac{n}{1} k^2 Z'_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} k^4 Z'_2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} k^6 Z'_3 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} k^{2(n-1)} Z'_{n-1} + (-1)^n k^{2n} Z'_n, \\ \Omega''_{2n+1} &= Z''_0 - \frac{n}{1} Z''_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} Z''_2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Z''_3 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} Z''_{n-1} + (-1)^n Z''_n, \end{aligned} \right.$$

qui fourniront les expressions demandées à la seule condition d'y remplacer, après avoir effectué chaque quadrature Z'_i ou Z''_i, la variable provisoire z par sa valeur $z = \text{sn}^2\,\omega$.

La question actuelle étant ainsi ramenée au calcul des seules quadratures (8), et remarquant qu'il suffira de déterminer la seconde seulement, la première se déduisant de celle-là en y

---

connexes Ω'_m et Ω''_m comme également fournies pour le cas de $m = 2n$ par les formules que nous écrivons ci-dessus (7bis).

A la vérité, cette hypothèse n'est pas celle qui correspond au problème particulier que nous avons en vue dans la présente Note; mais l'obtention de ce résultat ne nous ayant coûté, comme on vient de le voir, que quelques lignes seulement, nous avons cru opportun de l'acquérir, chemin faisant, à si peu de frais, pour le mettre à la disposition du Lecteur, dans le cas où il voudrait appliquer les mêmes procédés de calcul à l'un des problèmes les plus simples relatifs à l'hypothèse de l'exposant m pair, c'est-à-dire celles de $m = 0$, ou $m = 2$, qui correspondent à la détermination de la masse ou des moments principaux d'inertie du même corps, et retrouver également ainsi les résultats déjà obtenus à ce sujet dans notre Chapitre VI.

faisant simplement $k^2 = 1$, nous ferons, comme pour le calcul de l'intégrale précédente Ω_m,

(10) $$Z = z(1-k^2z) = z - k^2z^2, \qquad Z' = 1 - 2k^2z,$$

et partant semblablement de l'identité

$$d(z^m\sqrt{Z}) = \left[mz^{m-1}.\sqrt{Z} + z^m.\frac{Z'}{2\sqrt{Z}}\right]dz = z^{m-1}(2m\,Z + zZ')\frac{dz}{2\sqrt{Z}},$$

$$= z^{m-1}\left[2m.z(1-k^2z) + z.(1-2k^2z)\right]\frac{dz}{2\sqrt{Z}}$$

$$= z^m\left[2m(1-k^2z) + 1 - 2k^2z\right]\frac{dz}{2\sqrt{Z}}$$

$$= z^m\left[2m + 1 - 2(m+1)k^2z\right]\frac{dz}{2\sqrt{Z}},$$

nous en conclurons, en l'intégrant et ayant égard à la définition (10) de Z,

(11) $$z^m\sqrt{z(1-k^2z)} = (2m+1)\int\frac{z^m dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}} - 2(m+1)k^2\int\frac{z^{m+1}dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}},$$

puis de là, en faisant $k^2 = 1$ dans cette dernière égalité ellemême,

(12) $$z^m\sqrt{z(1-z)} = (2m+1)\int\frac{z^m dz}{2\sqrt{z(1-z)}} - 2(m+1)\int\frac{z^{m+1}dz}{2\sqrt{z(1-z)}}.$$

Or, comme l'on aura, eu égard à la définition admise $z = \text{sn}^2\,\omega$,

$$\left\{\begin{array}{ll} z^m.\sqrt{z}\sqrt{1-k^2z} &= \text{sn}^{2m}\,\omega.\,\text{sn}\,\omega\,\text{dn}\,\omega = \text{sn}^{2m+1}\,\omega\,\text{dn}\,\omega, \\ z^m\;\sqrt{z}\sqrt{1-z} &= \text{sn}^{2m}\,\omega.\,\text{sn}\,\omega\,\text{cn}\,\omega = \text{sn}^{2m+1}\,\omega\,\text{cn}\,\omega, \end{array}\right.$$

l'on déduira donc des deux égalités précédentes (11) et (12), en y prenant chacun des termes entre les limites z_1 et z_2 correspondantes aux limites données pour ω, et écrivant encore les

résultats à l'aide de nos notations (8), les deux formules de réduction

$$\left\{\begin{aligned}(\mathrm{sn}^{2m+1}\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2 &= (2m+1)\,Z''_m - 2(m+1)\,k^2 Z''_{m+1},\\ (\mathrm{sn}^{2m+1}\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2 &= (2m+1)\,Z'_m - 2(m+1)\,Z'_{m+1},\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en intervertissant leur ordre et les résolvant par rapport à Z''_{m+1} et Z'_{m+1},

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} Z'_{m+1} &= \frac{1}{2(m+1)}\left[(2m+1)\,Z'_m - (\mathrm{sn}^{2m+1}\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2\right],\\ Z''_{m+1} &= \frac{1}{2(m+1)k^2}\left[(2m+1)\,Z''_m - (\mathrm{sn}^{2m+1}\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2\right].\end{aligned}\right.$$

Ces deux formules de réduction, complètement analogues à celle (4) obtenue plus haut pour le calcul de l'intégrale Ω_m, permettront de même de ramener de proche en proche celui des deux intégrales Z'_n et Z''_n à la détermination des deux seules intégrales Z'_0 et Z''_0 (*), pour lesquelles on trouvera très aisément, quant à la seconde par exemple, la formule de quadrature

$$Z''_0 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{2\sqrt{z(1-k^2 z)}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\,.\,\mathrm{sn}^2\omega}{2\sqrt{\mathrm{sn}^2\omega\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\omega)}}$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{2\,\mathrm{sn}\,\omega\, d\,.\,\mathrm{sn}\,\omega}{2\,\mathrm{sn}\,\omega\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\omega}} = \frac{1}{k}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\,.\,k\,\mathrm{sn}\,\omega}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\omega}},$$

(*) On parvient aisément, en suivant cette voie, à un résultat important de Calcul Intégral, complètement analogue à celui que nous avons donné dans notre Chapitre VI pour l'intégrale $\Omega_m = \int_0^\omega \mathrm{sn}_\omega\, d\omega$ (voir la note de la page 505), en le déduisant alors d'une formule de réduction équivalente (aux notations près) aux formules précédentes (3ter) ou (4), nous voulons dire l'expression explicite des deux quadratures connexes de celle-là

$$\Omega'_m = \int_0^\omega \mathrm{dn}\,\omega\, d\omega \qquad \text{et} \qquad \Omega''_m = \int_0^\omega \mathrm{cn}\,\omega\, d\omega,$$

pour toute valeur entière et positive de l'exposant *m*.

c'est-à-dire la valeur

$$(14) \qquad Z_0'' = \frac{1}{k}\left[\arc \sin(k \operatorname{sn} \omega)\right]_1^2 ;$$

et comme, d'après les définitions (8), Z_n' se déduit de Z_n'' en y

---

En effet, si l'on convient de prendre 0 et ω pour les deux limites des intégrales que nous spécifions dans ce qui précède par les indices 1 et 2, la seconde des formules (13) que nous venons d'établir, en y chassant le dénominateur, puis écrivant $i-1$ à la place de m, et diminuant ensuite à chaque fois l'indice i d'une unité, engendrera successivement la série des équations

$$\left\{\begin{array}{lll|l}
2i.k^2 Z_i'' & -(2i-1) Z_{i-1}'' & = -\operatorname{sn}^{2i-1}\omega \operatorname{dn}\omega, & 1 \\
(2i-2).k^2 Z_{i-1}'' & -(2i-3) Z_{i-2}'' & = -\operatorname{sn}^{2i-3}\omega \operatorname{dn}\omega, & g_1 \\
(2i-4).k^2 Z_{i-2}'' & -(2i-5) Z_{i-3}'' & = -\operatorname{sn}^{2i-5}\omega \operatorname{dn}\omega, & g_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
(2i-2j+2).k^2 Z_{i-j+1}'' & -(2i-2j+1) Z_{i-j}'' & = -\operatorname{sn}^{2i-2j+1}\omega \operatorname{dn}\omega, & g_{j-1} \\
(2i-2j).k^2 Z_{i-j}'' & -(2i-2j-1) Z_{i-j-1}'' & = -\operatorname{sn}^{2i-2j-1}\omega \operatorname{dn}\omega, & g_j \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
4k^2 Z_2'' & -3 Z_1'' & = -\operatorname{sn}^3\omega \operatorname{dn}\omega, & g_{i-2} \\
2k^2 Z_1'' & - Z_0'' & = -\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega, & g_{i-1}
\end{array}\right.$$

lesquelles étant multipliées respectivement par les coefficients inscrits en marge en regard de chacune d'elles, et ajoutées ensuite membre à membre, formeront alors la suivante :

$$\begin{aligned}
2i.k^2 Z_i'' &+ \left[(2i-2)k^2.g_1 - (2i-1)\right] Z_{i-1}'' + \left[(2i-4)k^2.g_2 - (2i-3)g_1\right] Z_{i-2}'' \\
&+ \ldots\ldots + \left[(2i-2j)k^2.g_j - (2i-2j+1)g_{j-1}\right] Z_{i-j}'' + \ldots\ldots \\
&+ (2k^2.g_{i-1} - 3g_{i-2}) Z_1'' - g_{i-1} Z_0'' \\
&= -\operatorname{dn}\omega(\operatorname{sn}^{2i-1}\omega + g_1 \operatorname{sn}^{2i-3}\omega + g_2 \operatorname{sn}^{2i-5}\omega + \ldots \\
&\qquad + g_j \operatorname{sn}^{2i-2j-1}\omega + \ldots\ldots + g_{i-2}\operatorname{sn}^3\omega + g_{i-1}\operatorname{sn}\omega).
\end{aligned}$$

Or, si l'on détermine les différents coefficients $g_1, g_2, \ldots g_{i-1}$ par les conditions

$$\left\{\begin{array}{ll}
(2i-2)k^2.g_1 - (2i-1) = 0, & (2i-4)k^2.g_2 - 2(i-3)g_1 = 0, \\
\cdots & \cdots \\
(2i-2j)k^2.g_j - (2i-2j+1)g_{j-1} = 0, & \ldots\ldots, \; 2k^2.g_{i-1} - 3g_{i-2} = 0,
\end{array}\right.$$

faisant simplement $k = 1$, l'expression que nous venons d'obtenir fournira dès lors immédiatement pour Z'_0 cette autre analogue :

$$(15) \qquad Z'_0 = \left[\text{arc sin}(\text{sn}\,\omega)\right]_1^2. \ (^*)$$

---

qui leur assigneront en conséquence les valeurs

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} g_1 = \dfrac{2i-1}{2i-2}\dfrac{1}{k^2}, \qquad g_2 = \dfrac{2i-3}{2i-4}g_1 \cdot \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(2i-1)(2i-3)}{(2i-2)(2i-4)}\dfrac{1}{k^4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_j = \dfrac{2i-2j+1}{2i-2j}g_{j-1} \cdot \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots(2i-2j+1)}{(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots(2i-2j)}\dfrac{1}{k^{2j}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{i-1} = \dfrac{3}{2}g_{i-2} \cdot \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 5.3}{(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots 4.2}\dfrac{1}{k^{2(i-1)}}, \end{array}\right.$$

l'équation formée tout à l'heure, dans laquelle il ne subsistera plus dès lors au premier membre que le premier et le dernier terme seuls, fournira par conséquent pour l'intégrale Z''_i l'expression

$$(6)\left\{\begin{array}{l} Z''_i = \dfrac{1}{2i.k^2}\Big[g_{i-1}Z''_0 - \text{dn}\,\omega\,(\text{sn}^{2i-1}\omega + g_1\,\text{sn}^{2i-3}\omega + g_2\,\text{sn}^{2i-5}\omega \\ \qquad + \ldots\ldots + g_j\,\text{sn}^{2i-2j-1}\omega + \ldots\ldots + g_{i-2}\,\text{sn}^3\omega + g_{i-1}\,\text{sn}\,\omega)\Big], \end{array}\right.$$

la valeur de chacun des coefficients étant celle que nous venons d'indiquer.

Partant de là, si nous désignons, en vue de faciliter l'écriture des formules intéressantes que nous voulons donner, par le symbole $A_n^{(i)}$ le coefficient de rang $i+1$ dans le développement de la puissance n du binôme, coefficient dont la valeur est, comme l'on sait, étant écrite avec les notation et convention dont nous avons déjà fait usage dans notre Chapitre VI (page 483),

$$(\gamma) \qquad A_n^{(i)} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

et de même par le symbole $C_i^{(j)}$ le nouveau coefficient numérique

$$(\delta) \qquad C_i^{(j)} = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots(2i-2j+1)}{(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots(2i-2j)},$$

pour toutes les valeurs entières de j depuis $j = 1$ jusqu'à $j = i-1$, de telle sorte que le

---

*) Voir la note à la page 262.

Nous étant assuré ces procédés de calcul, arrivons maintenant à la détermination effective des différents éléments du déterminant proposé (3).

---

premier et le dernier de ces coefficients soient respectivement

$$C_i^{(1)}=\frac{2i-1}{2i-2}, \qquad C_i^{(i-1)}=\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 5.3}{(2i-2)(2i-4)\ldots\ldots 4.2}=\frac{(2i-1)!}{[2^{i-1}.(i-1)!]^2},$$

comme avec ces notations les valeurs ci-dessus (α) des coefficients g s'écriront

$$g_1=C_i^{(1)}\frac{1}{k^2}, \quad g_2=C_i^{(2)}\frac{1}{k^4}, \quad \ldots\ldots g_j=C_i^{(j)}\frac{1}{k^{2j}}, \quad \ldots\ldots g^{i-1}=C_i^{(i-1)}\frac{1}{k^{2(i-1)}},$$

en premier lieu l'expression (6) trouvée ci-dessus pour Z_i'' deviendra semblablement

$$Z_i''=\frac{1}{2i.k^2}\Bigg[C_i^{(i-1)}\frac{1}{k^{2(i-1)}}.Z_0'' - \operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega\left(\operatorname{sn}^{2(i-1)}\omega+\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\frac{1}{k^{2j}}\operatorname{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right)\Bigg],$$

et comme la première formule (13), dont nous avons tiré exclusivement ce résultat, se déduit de la seconde en y changeant simplement $\operatorname{dn}\omega$ en $\operatorname{cn}\omega$, Z'' en Z', et faisant en même temps $k^2=1$, il est bien clair, sans recommencer le calcul, que l'on trouvera, par le même procédé, pour l'intégrale Z_i' l'expression homologue :

$$Z_i'=\frac{1}{2i}\left[C_i^{(i-1)}.Z_0'-\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\left(\operatorname{sn}^{2(i-1)}\omega+\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\operatorname{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right)\right].$$

En second lieu, ces deux dernières valeurs étant remises respectivement au second membre de chacune des deux formules (9), qui s'écriraient également sous forme condensée

$$\Omega_{2n+1}'=Z_0'+\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i A_n^{(i)}k^{2i}Z_i', \qquad \Omega_{2n+1}''=Z_0''+\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i A_n^{(i)}Z_i'',$$

celles-ci deviendront donc à leur tour, avec les mêmes notations

$$\left\{\begin{aligned}\Omega_{2n+1}' &= Z_0'+\sum_{i=n}^{i=n}(-1)^i A_n^{(i)}k^{2i}\left[\frac{C_i^{(i-1)}}{2i}.Z_0'-\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{2i}\left(\operatorname{sn}^{2(i-1)}\omega+\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\operatorname{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right)\right],\\ \Omega_{2n+1}'' &= Z_0''+\sum_{i=n}^{i=n}(-1)^i A_n^{(i)}\left[\frac{C_i^{(i-1)}}{2i}\frac{1}{k^{2i}}.Z_0''-\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{2i.k^2}\left(\operatorname{sn}^{2(i-1)}\omega+\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\frac{1}{k^{2j}}\operatorname{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right)\right];\end{aligned}\right.$$

Quant à la première ligne, qui appartient tout entière au type Ω_m, aux coefficients constants près, la formule ci-dessus (4) donnant successivement, pour $m = 0$ et $m = 2$, les expressions

$$(16)\qquad \Omega_3 = \frac{1}{2k^2}\left[(1+k^2)\,\Omega_1 + \overline{\Omega}_0\right],$$
$$\Omega_5 = \frac{1}{4k^2}\left[-2\Omega_1 + 3(1+k^2)\,\Omega_3 + \overline{\Omega}_2\right],$$

---

de sorte, qu'en réunissant les termes semblables, remplaçant Z_0' et Z'' par leurs valeurs trouvées ci-dessus (15) et (14), et faisant enfin de nouveau, en tenant compte des définitions précédentes (γ) et (δ),

$$(\varepsilon)\qquad \mathcal{A}_i = A_n^{(i)}\frac{C_i^{(i-1)}}{2i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{(2i-1)!}{2i[2^{i-1}.(i-1)!]^2} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{2i!}{(2^i.i!)^2},$$

les expressions demandées des intégrales Ω'_{2n+1} et Ω''_{2n+1} seront donc définitivement les suivantes

$$(\eta)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega'_{2n+1} = {} & \left(1+\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\mathcal{A}_i k^{2i}\right).\arcsin(\mathrm{sn}\,\omega) \\
& - \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\sum_{i=n}^{i=n}(-1)^i\frac{A_n^{(i)}}{2i}k^{2i}\,\mathrm{sn}^{2(i-1)}\omega \\
& - \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\sum_{i=1}^{i=n}\left[(-1)^i\frac{A_n^{(i)}}{2i}k^{2i}\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\,\mathrm{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right], \\
\Omega''_{2n+1} = {} & \left(1+\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\mathcal{A}_i.\frac{1}{k^{2i}}\right)\cdot\frac{1}{k}\arcsin(k\,\mathrm{sn}\,\omega) \\
& - \frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{k^2}\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\frac{A_n^{(i)}}{2i}\,\mathrm{sn}^{2(i-1)}\omega \\
& - \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\sum_{i=1}^{i=n}\left[(-1)^i\frac{A_n^{(i)}}{2i}\sum_{j=1}^{j=i-1}C_i^{(j)}\frac{1}{k^{2(j+1)}}\,\mathrm{sn}^{2(i-j-1)}\omega\right],
\end{aligned}\right.$$

les valeurs du coefficient numérique $\mathcal{A}_i$, $A_n^{(i)}$ et $C_i^{(j)}$ étant celles indiquées par les formules (ε), (γ), et (δ).

D'ailleurs, l'expression analogue des intégrales Ω'_{2n} et Ω''_{2n} étant déjà donnée par les formules ci-dessus (7bis), l'on doit donc considérer comme connues les expressions des quadratures Ω'_m et Ω''_m pour toute valeur entière et positive de m, ainsi que nous l'avons annoncé.

Comme exemples d'application de ces dernières formules (η), considérons le cas simple de $n = 2$ qui suffit pour mettre en jeu une quantité au moins de chaque type parmi les

dont la seconde deviendra, en y remettant la première,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\Omega_5 &= \frac{1}{4k^2}\left[-2\Omega_1 + 3(1+k^2)\cdot\frac{1}{2k^2}\left\{(1+k^2)\Omega_1 + \overline{\Omega}_0\right\} + \overline{\Omega}_2\right]\\
&= \frac{1}{8k^4}\left[-4k^2\Omega_1 + 3(1+k^2)\left\{(1+k^2)\Omega_1 + \overline{\Omega}_0\right\} + 2k^2\overline{\Omega}_2\right]\\
&= \frac{1}{8k^4}\left[\left\{3(1+k^2)^2 - 4k^2\right\}\Omega_1 + 3(1+k^2)\overline{\Omega}_0 + 2k^2\overline{\Omega}_2\right]\\
&= \frac{1}{8k^4}\left[\left\{3(1-k^2)^2 + 8k^2\right\}\Omega_1 + 3(1+k^2)\overline{\Omega}_0 + 2k^2\overline{\Omega}_2\right],
\end{aligned}\right.$$

---

différents éléments analytiques dont elles se composent. Elles donneront alors, pour cette hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega'_5 &= (1 - \mathcal{A}_1 k^2 + \mathcal{A}_2 k^4).\operatorname{arc\,sin}(\operatorname{sn}\omega) - \operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\left(-\frac{A_2^{(1)}}{2}k^2 + \frac{A_2^{(2)}}{4}k^4\operatorname{sn}^2\omega\right)\\
&\qquad - \operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega.\frac{A_2^{(2)}}{4}k^4 C_2^{(1)},\\
\Omega''_5 &= \left(1 - \frac{\mathcal{A}_1}{k^2} + \frac{\mathcal{A}_2}{k^4}\right).\frac{1}{k}\operatorname{arc\,sin}(k\operatorname{sn}\omega) - \frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{k^2}\left(-\frac{A_2^{(1)}}{2} + \frac{A_2^{(2)}}{4}\operatorname{sn}^2\omega\right)\\
&\qquad - \operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega.\frac{A_2^{(2)}}{4}\frac{C_2^{(1)}}{k^4},
\end{aligned}\right.$$

les valeurs des différents coefficients étant, d'après les définitions précitées (ε), (γ), et (δ),

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2!}{1!\,1!}\,\frac{2!}{(2.1!)^2} = 2\,\frac{2}{2^2} = 1, \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{2!}{2!}\,\frac{4!}{(2^2.2!)^2} = \frac{1.2.3.4}{(2^3)^2} = \frac{3.2^3}{(2^3)^2} = \frac{3}{8},$$

$$A_2^{(1)} = 2, \qquad A_2^{(2)} = 1, \qquad C_2^{(1)} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2},$$

et par conséquent, en y remettant ces valeurs, ordonnant, et réduisant à un dénominateur unique, l'on aura définitivement les formules de quadratures

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega'_5 = \int_0^\omega \operatorname{dn}^5\omega\,d\omega &= \frac{1}{8}\Big[\left\{8 - (8k^2 - 3k^4)\right\}.\operatorname{arc\,sin}(\operatorname{sn}\omega)\\
&\qquad + (8k^2 - 3k^4)\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega - 2k^4\operatorname{sn}^3\omega\operatorname{cn}\omega\Big],\\
\Omega''_5 = \int_0^\omega \operatorname{cn}^5\omega\,d\omega &= \frac{1}{8k^5}\Big[\left\{(3 - 8k^2) + 8k^4\right\}.\operatorname{arc\,sin}(k\operatorname{sn}\omega)\\
&\qquad - k(3 - 8k^2)\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega - 2k^3\operatorname{sn}^3\omega\operatorname{dn}\omega\Big],
\end{aligned}\right.$$

si alors, dans les formules que nous avons ainsi obtenues (6), (16), et (17), nous introduisons l'hypothèse (k et k_1 étant tous

---

qu'il est aisé de vérifier directement, et qui concordent bien, ainsi que l'on s'en assure immédiatement avec les formules (26) que nous établissons plus loin dans la présente Note sous une forme légèrement différente, mieux appropriée au but que nous y avons en vue.

(*) Il y a lieu de formuler ici, au sujet de ces expressions (14) et (15), une remarque analogue à celle qui a été faite un peu plus haut, à l'occasion de l'expression précédente (6), à savoir que le calcul de ces mêmes quantités étant effectué comme quadrature de différentielles algébriques, conduit à des résultats qui n'en diffèrent qu'en apparence seulement, et dont l'équivalence avec lesdites expressions (14) et (15) s'établit sans peine, à l'aide d'un procédé tout semblable à celui que nous avons employé dans la circonstance précitée.

En effet, si l'on garde jusqu'au bout la variable z dans les différentielles en question, l'on trouvera très aisément, quant à la première,

$$Z_0'' = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{2\sqrt{z(1-k^2z)}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{kdz}{\sqrt{4k^2z - 4k^4z^2}} = \frac{1}{2k}\int_{z_1}^{z_2} \frac{2k^2dz}{\sqrt{1-(2k^2z-1)^2}},$$

c'est-à-dire, par conséquent, la valeur

$$Z_0'' = \frac{1}{2k}\left[\text{arc sin}\,(2k^2z-1)\right]_1^2 = \frac{1}{2k}\left[\text{arc sin}\,(2k^2\,\text{sn}^2\,\omega - 1)\right]_1^2,$$

qui entraînera dès lors, en faisant de nouveau $k=1$, pour la seconde intégrale en question, l'autre valeur

$$Z_0' = \frac{1}{2}\left[\text{arc sin}\,(2z-1)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\text{arc sin}\,(2\,\text{sn}^2\,\omega - 1)\right]_1^2.$$

Or, l'équivalence de la première de ces deux expressions que nous venons d'obtenir par ce nouveau procédé de calcul avec celle (14) trouvée en premier lieu plus haut, résultera encore manifestement de ce fait qu'il suffira d'établir, à savoir que les deux intégrales indéfinies correspondantes (la constante étant encore sous-entendue)

$$(\alpha)\qquad X_2 = \frac{1}{2k}\,\text{arc sin}\,(2k^2\,\text{sn}^2\,\omega - 1), \qquad Y_2 = \frac{1}{k}\,\text{arc sin}\,(k\,\text{sn}\,\omega),$$

ne diffèrent de nouveau que par une simple constante.

Pour le montrer, déduisant immédiatement de ces définitions de X_2 et Y_2

$$(\beta)\qquad \sin 2kX_2 = 2k^2\,\text{sn}^2\,\omega - 1, \qquad \sin kY_2 = k\,\text{sn}\,\omega,$$

nous en conclurons successivement, comme précédemment,

$$(\gamma)\qquad \sin 2kX_2 = 2\sin^2 kY_2 - 1 = \cos 2kY_2,$$

$$(\delta)\qquad \cos^2 kY_2 = 1 - \sin^2 kY_2 = 1 - k^2\,\text{sn}^2\,\omega = \text{dn}^2\,\omega,$$

$$(\varepsilon)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2 2kX_2 &= 1 - \text{sn}^2\, 2kX_2 = 1 - (2k^2\,\text{sn}^2\,\omega - 1)^2 \\ &= 1 - (4k^4\,\text{sn}^4\,\omega - 4k^2\,\text{sn}^2\,\omega + 1) \\ &= 4k^2\,\text{sn}^2\,\omega\,(1 - k^2\,\text{sn}^2\,\omega) = 4k^2\,\text{sn}^2\,\omega\,.\,\text{dn}^2\,\omega, \end{aligned}\right.$$

deux positifs par définition) (*)

$$\omega = u,\quad k = \frac{il}{n},\quad 1 + k^2 = 1 - \frac{l^2}{n^2},\quad 1 - k^2 = k_1^2 = -\frac{m^2}{n^2},\quad k_1 = \frac{im}{n},\quad \frac{k}{k_1} = \frac{l}{m},$$

conformément aux égalités (3), (13), et (16) du Chapitre VI, elles deviendront

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= \frac{i}{\frac{il}{n}}\left[\text{arc sin}\left(\frac{il}{m}\text{ cn } u\right)\right]_1^2 = \frac{n}{l}\left[\text{arc sin}\left(\frac{il}{m}\text{ cn } u\right)\right]_1^2, \\ U_3 &= \frac{1}{2\left(-\frac{l^2}{n^2}\right)}\left[\left(1 - \frac{l^2}{n^2}\right)U_1 + \overline{U}_0\right] = \frac{-1}{2l^2}\left[(n^2 - l^2)U_1 + n^2\overline{U}_0\right], \\ U_5 &= \frac{1}{8\frac{l^4}{n^4}}\left[\left(3\frac{m^4}{n^4} - 8\frac{l^2}{n^2}\right)U_1 + 3\left(1 - \frac{l^2}{n^2}\right)\overline{U}_0 - 2\frac{l^2}{n^2}\overline{U}_2\right] \\ &= \frac{1}{2^3 l^4}\left[(3m^4 - 8n^2l^2)U_1 + 3(n^2 - l^2)n^2\overline{U}_0 - 2n^2l^2\overline{U}_2\right], \end{aligned}\right.$$

---

et par conséquent, en tenant compte de l'égalité de droite (β) et de la précédente (δ), cette dernière expression (ε) donnera la suivante :

$$(\eta)\qquad \cos^2 2kX_2 = 4\sin^2 kY_2 \cos^2 kY_2 = \sin^2 2kY_2.$$

Il suivra donc encore de cette dernière égalité (η) et de celle (γ) que, dans la définition (α) de X_2, l'on pourra prendre l'arc sinus de telle sorte que l'on ait à la fois

$$\sin 2kX_2 = \cos 2kY_2,\qquad \cos 2kX_2 = -\sin 2kY_2,$$

auquel cas l'on aura en même temps les égalités

$$\begin{aligned}\sin 2k(X_2 - Y_2) &= \sin 2kX_2 \cos 2kY_2 - \cos 2kX_2 \sin 2kY_2 \\ &= \cos^2 2kY_2 + \sin^2 2kY_2 = 1,\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, de nouveau la suivante

$$2k(X_2 - Y_2) = 2n\pi + \frac{\pi}{2},\qquad \text{ou}\qquad X_2 - Y_2 = \text{const.},$$

ainsi que nous proposions de l'établir, ce qui justifie dès lors le fait annoncé au commencement de cette note.

(*) Voir, au Chapitre VI, la note de la page 497.

et par conséquent, en faisant abstraction des membres intermédiaires, puis multipliant ces trois égalités respectivement par l, $2^2 l^3$ et $2^4 l^5$, nous obtiendrons définitivement, pour les éléments de la première ligne du déterminant $\Delta_2^{(1)}$ (3), les trois expressions :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} lU_1 &= n\left[\arcsin\left(\frac{il}{m}\operatorname{cn} u\right)\right]_1^2,\\ 2^2 l^3 U_3 &= 2(l^2 - n^2).\,lU_1 - 2n^2.\,l\overline{U}_0,\\ 2^4 l^5 U_5 &= 2(3m^4 - 8n^2l^2).\,lU_1 + 3(n^2 - l^2).\,2n^2 l\overline{U}_0 - 4n^2l^2.\,l\overline{U}_2. \end{aligned}\right.$$

Semblablement, quant aux deux lignes suivantes, les deux formules analogues (9) donneront, pour les trois premières valeurs de l'entier n, les expressions

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &n = 0, && \Omega_1' = Z_0', && \Omega_1'' = Z_0'',\\ &n = 1, && \Omega_3' = Z_0' - k^2 Z_1', && \Omega_3'' = Z_0'' - Z_1'',\\ &n = 2, && \Omega_5' = Z_0' - 2k^2 Z_1' + k^4 Z_2', && \Omega_5'' = Z_0'' - 2Z_1'' + Z_2'', \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles Z_0' et Z_0'' étant déjà connues par les égalités (15) et (14), les quantités suivantes Z_1', Z_1'', Z_2', Z_2'' seront de même fournies par les deux formules (13) pour les valeurs 0 et 1 de l'entier m, et seront par conséquent celles-ci :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} Z_1' &= \frac{1}{2}\left[Z_0' - (\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega)_1^2\right], & Z_1'' &= \frac{1}{2k^2}\left[Z_0'' - (\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega)_1^2\right],\\ Z_2' &= \frac{1}{4}\left[3Z_1' - (\operatorname{sn}^3\omega\operatorname{cn}\omega)_1^2\right], & Z_2'' &= \frac{1}{4k^2}\left[3Z_1'' - (\operatorname{sn}^3\omega\operatorname{dn}\omega)_1^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Or comme, en se reportant aux définitions (2), on peut écrire en premier lieu,

$$\left\{\begin{aligned} (\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega)_1^2 &= (\operatorname{dn}^0\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{sn}\omega)_1^2 = \overline{\Omega_0'},\\ (\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega)_1^2 &= (\operatorname{cn}^0\omega\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega)_1^2 = \overline{\Omega_0''}, \end{aligned}\right.$$

puis, en second lieu, en se servant de ce premier résultat,

$$\left\{\begin{aligned}
(\mathrm{sn}^3\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2 &= -\frac{1}{k^2}\left(-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\omega\,.\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\right)_1^2 \\
&= -\frac{1}{k^2}\left[(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\omega)\,.\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega-\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{k^2}\left[(\mathrm{dn}^2\omega\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2-(\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2\right] = -\frac{1}{k^2}\left(\overline{\Omega}_2'-\overline{\Omega}_0'\right), \\
(\mathrm{sn}^3\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2 &= (\mathrm{sn}^2\,\omega\,.\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2 = \left[(1-\mathrm{cn}^2\,\omega)\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\right]_1^2 \\
&= -(\mathrm{cn}^2\,\omega\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2+(\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2 = -(\overline{\Omega}_2''-\overline{\Omega}_0''),
\end{aligned}\right.$$

l'on voit ainsi que les deux expressions (20) des Z' et Z'' auxquelles nous venons d'arriver tout à l'heure, pourront être écrites sous forme abrégée, à l'aide de ces notations (2) :

$$(21)\left\{\begin{aligned}
Z_1' &= \frac{1}{2}\left(Z_0'-\overline{\Omega}_0'\right), & Z_1'' &= \frac{1}{2k^2}\left(Z_0''-\overline{\Omega}_0''\right), \\
Z_2' &= \frac{1}{4}\left[3Z_1'+\frac{1}{k^2}\left(\overline{\Omega}_2'-\overline{\Omega}_0'\right)\right], & Z_2'' &= \frac{1}{4k^2}\left[3Z_1''+\left(\overline{\Omega}_2''-\overline{\Omega}_0''\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

En ayant donc égard aux expressions (15) et (14) trouvées pour Z_0' et Z_0'', et reportant, d'autre part, ces dernières valeurs que nous venons d'obtenir dans les expressions précédentes (19) des Ω' et Ω'', l'on trouvera successivement

$$(22)\left\{\begin{aligned}
\Omega_1' &= Z_0' = \left[\operatorname{arc\,sin}(\mathrm{sn}\,\omega)\right]_1^2, \\
\Omega_1'' &= Z_0'' = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,sin}(k\,\mathrm{sn}\,\omega)\right]_1^2,
\end{aligned}\right.$$

$$(23)\left\{\begin{aligned}
\Omega_3' &= Z_0'-k^2Z_1' = Z_0'-k^2.\frac{1}{2}\left(Z_0'-\overline{\Omega}_0'\right) = \frac{1}{2}\left[(2-k^2)Z_0'+k^2\overline{\Omega}_0'\right], \\
\Omega_3'' &= Z_0''-\quad Z_1'' = Z_0''-\frac{1}{2k^2}\left(Z_0''-\overline{\Omega}_0''\right) = \frac{1}{2k^2}\left[(2k^2-1)Z_0''+\overline{\Omega}_0''\right],
\end{aligned}\right.$$

$$
(24)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\Omega'_5 &= Z'_0 - 2k^2 Z'_1 + k^4 Z'_2 \\
&= Z'_0 - 2k^2 Z'_1 + k^4 . \frac{1}{4}\left[3Z'_1 + \frac{1}{k^2}(\overline{\Omega}'_2 - \overline{\Omega}'_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4Z'_0 + (3k^4 - 8k^2) . Z'_1 + k^2\,\overline{\Omega}'_2 - k^2\overline{\Omega}'_0\right], \\
\Omega''_5 &= Z''_0 - 2Z''_1 + Z''_2 \\
&= Z''_0 - 2Z''_1 + \frac{1}{4k^2}\left[3Z''_1 + (\overline{\Omega}''_2 - \overline{\Omega}''_0)\right] \\
&= \frac{1}{4k^2}\left[4k^2 Z''_0 + (3 - 8k^2) Z''_1 + \overline{\Omega}''_2 - \overline{\Omega}''_0\right],
\end{aligned}
\right.
$$

ou, ce qui est la même chose, pour le second groupe (23), en y remettant à la place de Z'_0 et Z''_0 leurs valeurs Ω'_1 et Ω''_1 (19),

$$
(25)\qquad \Omega'_5 = \frac{1}{2}\left[(2 - k^2)\Omega'_1 + k^2\overline{\Omega}'_0\right], \qquad \Omega''_5 = \frac{1}{2k^2}\left[(2k^2 - 1)\Omega''_1 + \overline{\Omega}''_0\right];
$$

et de même, pour le troisième groupe (24), en y remettant, d'abord à la place de Z'_1 et Z''_1 leurs valeurs (21), elles deviendront une première fois

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Omega'_5 &= \frac{1}{4}\left[4Z'_0 + (3k^4 - 8k^2) . \frac{1}{2}\left(Z'_0 - \overline{\Omega}'_0\right) + k^2\overline{\Omega}'_2 - k^2\overline{\Omega}'_0\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[(3k^4 - 8k^2 + 8) Z'_0 - (3k^4 - 8k^2 + 2k^2)\overline{\Omega}'_0 + 2k^2\overline{\Omega}'_2\right], \\
\Omega''_5 &= \frac{1}{4k^2}\left[4k^2 Z''_0 + (3 - 8k^2) . \frac{1}{2k^2}\left(Z''_0 - \overline{\Omega}''_0\right) + \overline{\Omega}''_2 - \overline{\Omega}''_0\right] \\
&= \frac{1}{8k^4}\left[(3 - 8k^2 + 8k^4) Z''_0 - (3 - 8k^2 + 2k^2)\overline{\Omega}''_0 + 2k^2\overline{\Omega}''_2\right],
\end{aligned}
\right.
$$

puis, définitivement, en réduisant, et remplaçant de nouveau Z'_0 et Z''_0 par leurs valeurs Ω'_1 et Ω''_1 :

$$(26)\quad \begin{cases} \Omega'_5 = \dfrac{1}{8}\left[(3k^4 - 8k^2 + 8)\Omega'_1 + 3k^2(2-k^2)\overline{\Omega}'_0 + 2k^2\overline{\Omega}'_2\right], \\ \Omega''_5 = \dfrac{1}{8k^4}\left[(3 - 8k^2 + 8k^4)\Omega''_1 + 3(2k^2-1)\overline{\Omega}''_0 + 2k^2\overline{\Omega}''_2\right]. \end{cases}$$

Les trois groupes de formules (22), (25), et (26) fournissent désormais tous les éléments des deuxième et troisième lignes du déterminant $\Delta^{(1)}_x$ (3), en y introduisant encore les hypothèses correspondantes, savoir, pour la deuxième $\omega = v$, $k = k'$, et pour la troisième $\omega = w$, $k = k''$: auquel cas, d'une part, les premières formules de chacun de ces trois groupes donneront, relativement aux éléments de la seconde ligne, les expressions

$$(27)\quad \begin{cases} V'_1 = \left[\text{arc sin } (\text{sn } v)\right]^2_1, \\ V'_3 = \dfrac{1}{2}\left[(2-k'^2)\,V'_1 + k'^2\overline{V}'_0\right], \\ V'_5 = \dfrac{1}{8}\left[(3k'^4 - 8k'^2 + 8)\,V'_1 + 3k'^2(2-k'^2)\overline{V}'_0 + 2k'^2\overline{V}'_2\right], \end{cases}$$

et d'autre part les secondes formules des mêmes groupes fourniront semblablement, en vue des éléments de la troisième ligne, ces autres expressions

$$(28)\quad \begin{cases} W''_1 = \dfrac{1}{k''}\left[\text{arc sin } (k''\text{ sn } w)\right]^2_1, \\ W''_3 = \dfrac{1}{2k''^2}\left[(2k''^2 - 1)\,W''_1 + \overline{W}''_0\right]. \\ W''_5 = \dfrac{1}{8k''^4}\left[(3 - 8k''^2 + 8k''^4)\,W''_1 + 3\,(2k''^2 - 1)\,\overline{W}''_0 + 2k''^2\overline{W}''_2\right], \end{cases}$$

dans lesquelles il n'y aura plus, tant pour ce dernier groupe que pour le précédent, qu'à remettre pour k' et k'' les valeurs admises par nos définitions au début de notre Chapitre VI.

A cet effet, ayant, quant au deuxième groupe (27), d'après les valeurs (3) et la relation de gauche (5) de ce Chapitre,

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
& k' = \frac{im}{l}, \quad 2 - k'^2 = 2 + \frac{m^2}{l^2} = \frac{2l^2 + m^2}{l^2} = \frac{l^2 + (l^2 + m^2)}{l^2} = \frac{l^2 - n^2}{l^2}, \\
& 3k'^4 - 8k'^2 + 8 = 3\frac{m^4}{l^4} + 8\frac{m^2}{l^2} + 8 = \frac{1}{l^4}\left[3m^4 + 8l^2(m^2 + l^2)\right] \\
& \qquad = \frac{1}{l^4}(3m^4 - 8n^2l^2),
\end{aligned}
\right.
$$

et quant au troisième groupe (28), k'' étant positif par définition,

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
& k'' = \frac{-in}{m}\,{}^{(*)}, \quad 2k''^2 - 1 = -2\frac{n^2}{m^2} - 1 = \frac{-(2n^2 + m^2)}{m^2} = \frac{-n^2 - (n^2 + m^2)}{m^2} \\
& \qquad = \frac{-n^2 + l^2}{m^2}, \\
& 3 - 8k''^2 + 8k''^4 = 3 + 8\frac{n^2}{m^2} + 8\frac{n^4}{m^4} = \frac{1}{m^4}\left[3m^4 + 8n^2(m^2 + n^2)\right] \\
& \qquad = \frac{1}{m^4}(3m^4 - 8n^2l^2),
\end{aligned}
\right.
$$

les trois égalités (27) deviendront, en y remettant les valeurs (29) des coefficients de ce groupe,

$$
\left\{
\begin{aligned}
& V'_1 = \left[\text{arc sin}(\text{sn}\, v)\right]^2_1, \qquad V'_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{l^2 - n^2}{l^2}V'_1 - \frac{m^2}{l^2}\overline{V'_0}\right], \\
& V'_5 = \frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{l^4}(3m^4 - 8n^2l^2).V'_1 - 3\frac{m^2}{l^2}\frac{l^2 - n^2}{l^2}\overline{V'_0} - 2\frac{m^2}{l^2}\overline{V'_2}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

d'où, par conséquent, en les multipliant respectivement par l, $2^2 l^3$, et $2^4 l^5$, pour les éléments de la seconde ligne du déterminant (3), les expressions définitives

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
& lV'_1 = l\left[\text{arc sin}(\text{sn}\, v)\right]^2_1, \\
& 2^2 l^3 V'_3 = 2(l^2 - n^2).lV'_1 - 2m^2 l\overline{V'_0}, \\
& 2^4 l^5 V'_5 = 2(3m^4 - 8n^2l^2).lV'_1 - 3(l^2 - n^2).2m^2 l\overline{V'_0} - 4l^2m^2.l\overline{V'_2};
\end{aligned}
\right.
$$

(*) Voir, au Chapitre VI, la seconde note de la page 198.

et de même, comme en remettant dans l'autre groupe (28) les valeurs (30) de ses coefficients, il deviendra

$$\left\{\begin{aligned}
W_1'' &= \frac{1}{\frac{-in}{m}}\left[\arcsin\left(\frac{-in}{m}\operatorname{sn} w\right)\right]_1^2,\\
W_3'' &= \frac{1}{2\frac{(in)^2}{m^2}}\left[\frac{l^2-n^2}{m^2}W_1''+\overline{W_0''}\right] = \frac{1}{2(in)^2}\left[(l^2-n^2)W_1''+m^2\overline{W_0''}\right],\\
W_5'' &= \frac{1}{2^3\frac{(in)^4}{m^4}}\left[\frac{1}{m^4}(3m^4-8n^2l^2)W_1''+3\frac{l^2-n^2}{m^2}\overline{W_0''}-2\frac{n^2}{m^2}\overline{W_2''}\right]\\
&= \frac{1}{2^3(in)^4}\left[(3m^4-8n^2l^2)W_1''+3(l^2-n^2).m^2\overline{W_0''}-2n^2m^2.\overline{W_2''}\right],
\end{aligned}\right.$$

l'on aura donc semblablement, en multipliant encore ces égalités respectivement par in, $2^2(in)^3$, et $2^4(in)^5$, pour les éléments de la troisième ligne, ces autres expressions définitives :

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}
inW_1'' &= -m\left[\arcsin\left(\frac{-in}{m}\operatorname{sn} w\right)\right]_1^2,\\
2^2(in)^3W_3'' &= 2(l^2-n^2).inW_1''+2m^2\,in\overline{W_0''},\\
2^4(in)^5W_5'' &= 2(3m^4-8n^2l^2).inW_1''+3(l^2-n^2).2m^2in\overline{W_0''}-4n^2m^2.in\overline{W_2''}.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de tous les éléments du déterminant proposé (3) étant ainsi obtenues et représentées par les trois groupes d'expressions (18), (31), et (32), rien n'est plus facile à présent que le calcul effectif de ce déterminant, car, avec la forme rencontrée pour ces expressions, les réductions à opérer s'offriront pour ainsi dire d'elles-mêmes.

En effet, l'on trouvera, en faisant la substitution d'abord pour les deux dernières colonnes seulement, puis opérant les réductions, divisant alors chaque ligne respectivement par les facteurs n, l, m, et changeant enfin les signes des deux premières lignes,

$$\Delta_x^{(1)} = \begin{vmatrix} lU_1, & 2(l^2-n^2).lU_1 - 2n^2 l\overline{U}_0, & 2(3m^4-8n^2l^2).lU_1 + 3(l^2-n^2).(-2n^2l\overline{U}_0) - 4n^2l^2.l\overline{U}_2 \\ lV'_1, & 2(l^2-n^2)\,lV'_1 - 2m^2l\overline{V'_0}, & 2(3m^4-8n^2l^2).lV'_1 + 3(l^2-n^2).(-2m^2l\overline{V'_0}) - 4l^2m^2.l\overline{V'_2} \\ inW''_1, & 2(l^2-n^2).inW''_1 + 2m^2in\overline{W''_0}, & 2(3m^4-8n^2l^2).inW''_1 + 3(l^2-n^2).(2m^2in\overline{W''_0}) - 4m^2n^2.in\overline{W''_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} lU_1, & -2n^2l\overline{U}_0, & 3(l^2-n^2).(-2n^2l\overline{U}_0) - 4n^2l^2.l\overline{U}_2 \\ lV'_1, & -2m^2l\overline{V'_0}, & 3(l^2-n^2).(-2m^2l\overline{V'_0}) - 4l^2m^2.l\overline{V'_2} \\ inW''_1, & 2m^2in\overline{W''_0}, & 3(l^2-n^2).(2m^2in\overline{W''_0}) - 4m^2n^2.in\overline{W''_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} lU_1, & -2n^2l\overline{U}_0, & -4n^2l^2.l\overline{U}_2 \\ lV'_1, & -2m^2l\overline{V'_0}, & -4l^2m^2.l\overline{V'_2} \\ inW''_1, & 2m^2in\overline{W''_0}, & -4m^2n^2.in\overline{W''_2} \end{vmatrix} = 2^3.lmn \begin{vmatrix} -\frac{1}{n}lU_1, & nl\overline{U}_0, & nl^3\overline{U}_2 \\ -V'_1, & m^2\overline{V'_0}, & l^2m^2\overline{V'_2} \\ \frac{1}{m}inW''_1, & min\overline{W''_0}, & m(in)^3W''_2 \end{vmatrix};$$

et, cela étant fait, si l'on a égard alors seulement aux premières égalités de chacun des groupes précités (18), (31), et (32), il est clair que la même expression deviendra, en tenant compte de nos définitions (2), et faisant usage de nouveau de notre notation habituelle $\sqrt{G} = lmn$,

$$\Delta_x^{(1)} = 2^3\sqrt{G}\begin{vmatrix} -\left[\arcsin\left(\frac{il}{m}\operatorname{cn}u\right)\right]_1^2, & nl(\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u)_1^2, & nl^3(\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u)_1^2 \\ -\left[\arcsin(\operatorname{sn}v)\right]_1^2, & m^2(\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v)_1^2, & l^2m^2(\operatorname{dn}^2v\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v)_1^2 \\ -\left[\arcsin\left(\frac{-in}{m}\operatorname{sn}w\right)\right]_1^2, & min(\operatorname{dn}w\operatorname{sn}w)_1^2, & m(in)^3(\operatorname{cn}^2w\operatorname{dn}w\operatorname{sn}w)_1^2 \end{vmatrix},$$

valeur qui, étant remise dans la formule de gauche (3) d'où nous étions partis, en même temps qu'on en multipliera et divisera le second membre par le facteur $-i$, reproduira bien alors exactement, comme l'on voit, pour la somme envisagée $I_x^{(1)}$, celle (169) obtenue dans notre Chapitre VI à l'aide de nos variables p, q, r.

Le calcul que nous venons d'effectuer permet d'apprécier le service rendu par ces variables pour toutes les déterminations que nous avons opérées dans ce même Chapitre; car si le présent calcul a pu réussir, quoique assez laborieusement, pour ce cas si simple de l'exposant $\alpha = 1$, grâce à l'ordre scrupuleux que nous avons pris soin d'observer dans tous ses détails, pour le cas suivant déjà de $\alpha = 2$, les opérations deviennent par ce procédé extrêmement compliquées, et pour les cas ultérieurs elles seraient certainement tout à fait inextricables. On peut donc considérer ce calcul comme la justification incontestable de l'opportunité qu'il y avait à introduire, pour ce genre de calculs, les variables p, q, r, qui nous ont permis alors de les accomplir avec tant de facilité.

FIN DE L'APPENDICE ET DE TOUT L'OUVRAGE.

